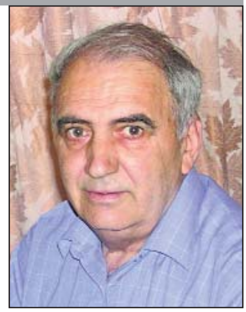

Можаев Виктор Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ), член редколегии журнала «Квант».

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Во введении к данной статье обсуждаются вопросы, касающиеся величины, направления и характерных особенностей силы Лоренца.

В задачах 1 и 2 рассматривается движение заряженных частиц, скорость которых перпендикулярна индукции однородного магнитного поля, вводится понятие циклотронной частоты для свободной заряженной частицы.

Пространственное движение заряженных частиц в однородном магнитном поле разбирается в задачах 3 и 4.

Задачи 5 и 6 – это задачи повышенной сложности для углублённого изучения данного раздела физики.

Выражение для силы, действующей на заряженную частицу, движущуюся в электромагнитном поле (при наличии электрического и магнитного полей) впервые было получено Х. А. Лоренцем. Это был результат обобщения экспериментальных законов – закона Кулона и закона Ампера. Обычно это выражение называют *обобщённой силой Лоренца*. А силу, действующую на движущуюся заряженную частицу только со стороны магнитного поля, принято называть *силой Лоренца*. Если положительно заряженная частица с зарядом q в некоторой точке пространства имеет скорость $\vec{\upsilon}$, а индукция внешнего магнитного поля в этой точке равна $\vec{B}$, то абсолютная величина силы Лоренца

$$\left|\vec{F}_л\right| = q\left|\vec{\upsilon}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin\alpha ,$$

где α – угол между вектором скорости и вектором магнитной индукции. Произведение $\left|\vec{B}\right| \sin\alpha$ – это величина проекции вектора $\vec{B}$ на направление, перпендикулярное скорости частицы и лежащее в плоскости векторов $\vec{B}$ и $\vec{\upsilon}$. Отсюда понятно, что сила Лоренца возникает при пересечении заряженной частицей силовых линий индукции магнитного поля. Её величина пропорциональна заряду частицы, её скорости и

нормальной составляющей ($\left|\vec{B}\right|\sin\alpha$) вектора $\vec{B}$ на направление её скорости.

Направление действия силы Лоренца определяется с помощью правила левой руки. Если левую руку расположить так, чтобы составляющая магнитной индукции $\vec{B}$, перпендикулярная скорости заряда частицы, входила в ладонь, а четыре пальца были направлены по движению положительного заряда (против движения отрицательного), то отогнутый на $90°$ большой палец покажет направление действующей на заряд силы Лоренца. Исходя из данного правила определения направления действия силы Лоренца, подчеркнём чрезвычайно важное свойство силы Лоренца: она всегда одновременно перпендикулярна вектору скорости частицы $\vec{\upsilon}$ и вектору индукции $\vec{B}$. А так как сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, то она не совершает работы и тем самым не изменяет кинетическую энергию частицы, а, следовательно, её скорость остаётся неизменной по абсолютной величине. Под действием силы Лоренца меняется лишь направление скорости частицы.

Замечание. В математике есть понятие векторного произведения двух векторов: векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть третий вектор $\vec{c}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а его абсолютная величина

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторная запись имеет вид:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}.$$

Направление вектора $\vec{c}$ определяется *правилом буравчика*: при кратчайшем повороте ручки буравчика по направлению от конца вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ сам буравчик указывает направление вектора $\vec{c}$. В этом случае говорят, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правовинтовую тройку.

Если воспользоваться этим понятием, то векторная запись силы Лоренца для заряженной частицы с любым знаком заряда q принимает вид:

$$\vec{F}_л = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}.$$

Перейдём к разбору задач.

Задача 1. В вакуумной камере, находящейся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл, в результате ядерного распада вылетает электрон, скорость которого лежит в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, и равна $\upsilon = 2 \cdot 10^7$ м/с. 1) Показать, что электрон будет двигаться по окружности, и найти радиус этой окружности. 2) Определить угловую частоту обращения электрона. Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса

$$m_e = 0{,}91 \cdot 10^{-30} \text{ кг}.$$

Решение. Пусть электрон вылетает из точки A (рис.1) со скоростью $\vec{\upsilon}$, расположенной в плоскости рисунка. Вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ перпендикулярен скорости $\vec{\upsilon}$ и направлен от нас. На электрон действует сила Лоренца $\vec{F}_л$, которая расположена в плоскости рисунка и перпендикулярна вектору скорости $\vec{\upsilon}$ электрона. Сила Лоренца является центростремительной силой, и уравнение движения электрона имеет вид:

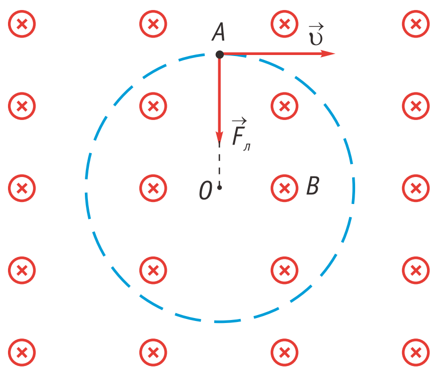

Рис.1

$$m_e \frac{\upsilon^2}{R} = e\upsilon B.$$

Здесь R – радиус кривизны траектории электрона. Поскольку величина скорости υ электрона и индукция магнитного поля B остаются постоянными, то и радиус кривизны R остаётся постоянным, а это означает, что траекторией движения электрона является окружность. Радиус этой окружности

$$R = \frac{m_e \upsilon}{eB} = 1{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Центр окружности (точка O) расположен на прямой, перпендикулярной к вектору $\vec{\upsilon}$ и проведённой из точки A.

Период обращения электрона по этой окружности

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

Угловая частота обращения

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{e}{m_e} B = 1{,}76 \cdot 10^9 \text{ рад/с}.$$

В физических явлениях, связанных с движением заряженных частиц в магнитном поле, эта частота играет существенную роль, поэтому она имеет специальное название: *циклотронная частота*. Отметим её характерную особенность: циклотронная частота любой заряженной частицы не зависит от её скорости, а определяется величиной удельного заряда частицы (отношение заряда к массе) и величиной индукции магнитного поля.

Задача 2. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю с индукцией $B = 0{,}01$ Тл, из точки A вылетает протон под углом $\alpha = 30°$ к отрезку AC (рис. 2). При какой скорости протон пролетит через точку C, если расстояние AC равно $L = 0{,}5$ м? Заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса

$$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

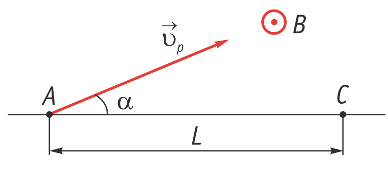

Рис.2

Решение. Из решения задачи 1 мы знаем, что при любой скорости протон будет двигаться по окружности радиуса

$$R = \frac{m_p \upsilon_p}{qB},$$

где υ_p – абсолютная величина скорости протона. Центр этой окружности будет лежать на прямой, проведённой из точки A перпендикулярно вектору скорости $\vec{\upsilon}_p$. Это с одной стороны, а с другой стороны, поскольку точки A и C должны принадлежать одной окружности, то центр окружности должен находиться на прямой, проходящей через середину хорды AC (точка D на рис.3) и перпендикулярной этой хорде (прямая DO). Из этих двух условий следует, что центр окружности, которая является траекторией протона, должен являться точкой пересечения этих прямых (AO и DO).

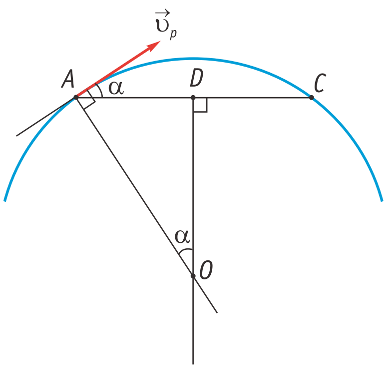

Рис.3

Следовательно, центром окружности является точка O, а ΔAOD является прямоугольным треугольником, в котором $\angle AOD = \alpha$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), а гипотенуза AO является радиусом окружности R. Из ΔAOD следует, что

$$\sin\alpha = \frac{L}{2R} = \frac{LqB}{2m_p \upsilon_p}.$$

Отсюда

$$\upsilon_p = \frac{qLB}{2m_p \sin\alpha} = 0,48 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 3. Пластины плоского вакуумного диода замкнуты через микроамперметр постоянного тока (рис.4). Одна из пластин диода (катод) освещается ультрафиолетовым светом. Под действием этого облучения с поверхности пластины вылетают электроны (фотоэффект) и, достигая противоположной пластины (анода), создают ток в цепи диода. Если теперь между пластинами диода включить магнитное поле с индукцией, параллельной плоскости пластин, и начать увеличивать величину поля, то при некотором значении индукции $B_к = 2 \cdot 10^{-3}$ Тл ток в цепи диода прекратится. Определить скорость фотоэлектронов, если расстояние между пластинами $d = 5$ мм. Можно считать, что контактные разности потенциалов отсутствуют, а электроны вылетают во всех направлениях в пределах телесного угла 2π с постоянной по абсолютной величине скоростью.

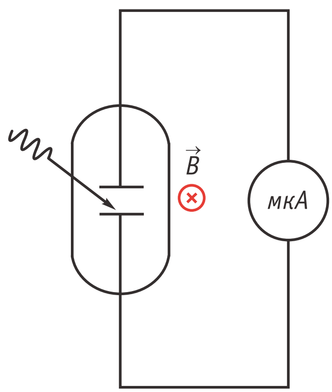

Рис.4

Решение. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную вектору индукции $\vec{B}$ (рис.5). Пусть из некоторой точки A облучаемой поверхности пластины CD вылетают электроны с одинаковыми скоростями υ_e, но с разными углами вылета α в пределах от $\pi/2$ до

$-\pi/2$. Угол вылета отсчитывается от нормали к поверхности пластины по часовой стрелке. Как следует из решения задачи 1, все электроны будут двигаться по окружностям одинакового радиуса

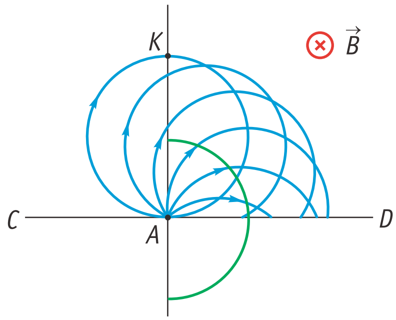

Рис.5

$$R=\frac{m_e\upsilon_e}{eB}, \qquad (1)$$

где e – модуль заряда электрона, m_e – масса электрона.

На рис.5 показано семейство траекторий электронов для разных углов вылета. Центры окружностей будут располагаться на полуокружности радиуса R, которая на рис.5 изображена зелёной линией. Скорости электронов в точке A направлены по касательным к соответствующим траекториям. Из приведённого семейства траекторий электронов видно, что максимальное удаление от поверхности пластины CD будет у электрона с углом вылета $\alpha=-\pi/2$ (скорость в точке A направлена вдоль прямой от A к C). В этом случае электрон удаляется на расстояние AK, равное $2R$. Следовательно, если расстояние AK сравнивается с расстоянием между пластинами d, то электроны перестают попадать на вторую пластину (анод), и ток в цепи диода прекращается. Условие отсутствия тока

$$d\geq 2R. \qquad (2)$$

После подстановки (1) в (2) получим

$$d\geq\frac{2m_e\upsilon_e}{eB_к}.$$

Отсюда скорость электронов

$$\upsilon_e=\frac{edB_к}{2m_e}=8{,}8\cdot10^5\ м/с. \qquad (3)$$

Пока мы рассмотрели плоскую задачу: скорости наших электронов, вылетающих из точки A, лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. Но у нас пространственная задача: электроны разлетаются внутри телесного угла 2π. Покажем, что при полученном условии прекращения тока и все другие электроны, скорости которых лежат в других плоскостях, тем более не достигнут анода.

Скорость любого электрона, вылетевшего из точки A, можно разложить на две составляющие: одна вдоль магнитного поля, а другая в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. Эти составляющие будут оставаться неизменными в процессе движения. Проекция скорости на плоскость, перпендикулярную направлению магнитного поля, всегда будет меньше или равна υ_e. Поэтому радиусы круговых орбит (точнее, радиусы проекций орбит на плоскость, перпендикулярную $\vec{B}$) также будут меньше или равны радиусам орбит, изображённым на рис.5. Следовательно, решение (3) является решением данной задачи.

Замечание. В реальности при фиксированной частоте ультрафиолетового света выбиваемые электроны имеют скорости от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от частоты света и материала катода. В задаче и найдена эта максимальная скорость.

Задача 4. Положительно заряженная частица с зарядом q и массой m влетает в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вдоль оси OX (рис.6).

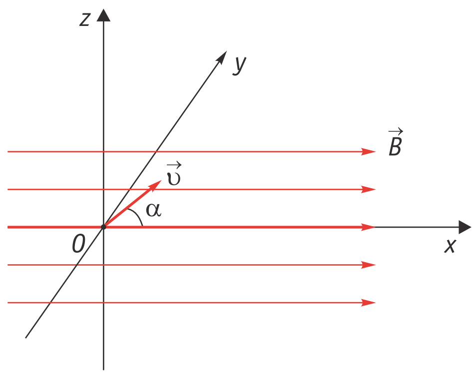

Рис.6

Находясь в точке 0, частица обладает скоростью $\vec{\upsilon}$, расположенной в плоскости XOZ и направленной под углом α к вектору $\vec{B}$. Показать, что движение частицы будет происходить по винтовой линии и определить: 1) радиус винтовой линии, 2) шаг винтовой линии.

Решение. В данном случае удобно рассмотреть движение частицы в проекции на плоскость YOZ и вдоль оси OX. Результирующее движение частицы будет являться суммой (суперпозицией) этих двух независимых движений. Проекция скорости частицы в точке 0 на плоскость YOZ: $\upsilon_z = \upsilon \sin\alpha$, а проекция на ось OX: $\upsilon_x = \upsilon \cos\alpha$. Воспользовавшись решением задачи 1, мы можем сказать, что движение частицы в плоскости YOZ будет происходить по окружности радиуса

$$R = \frac{m\upsilon \sin\alpha}{qB}.$$

Траектория движения частицы в плоскости YOZ показана на рис.7.

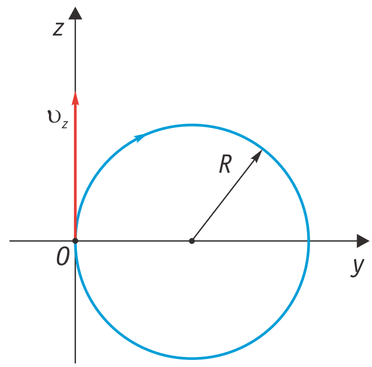

Рис.7

На частицу вдоль оси OX силы не действуют, проекция силы Лоренца на эту ось равна нулю, поэтому вдоль оси OX движение будет равномерное со скоростью

$$\upsilon_x = \upsilon \cos\alpha.$$

Результирующее движение частицы – это движение по винтовой линии (рис.8) с радиусом

$$R = \frac{m\upsilon \sin\alpha}{qB}.$$

Время одного полного оборота частицы

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon \sin\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

За это время частица смещается вдоль оси OX на расстояние h, которое называют шагом винтовой линии

$$h = \upsilon \cos\alpha \cdot T = \frac{2\pi m\upsilon \cos\alpha}{qB}.$$

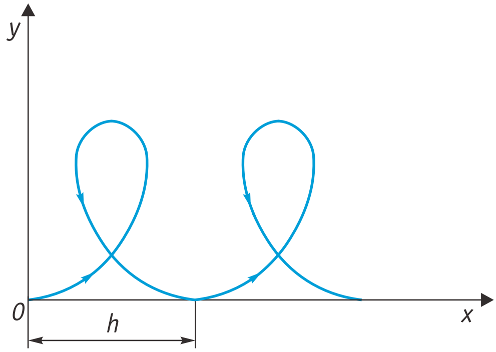

Рис.8

Задача 5. Протон влетает в камеру Вильсона и в точке $x = y = 0$ (рис.9) имеет скорость $\upsilon_0 = 10^6$ м/с, направленную вдоль оси OX. Двигаясь в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, направленной перпендикулярно скорости, и, испытывая торможение, протон останавливается. Полагая, что сила торможения пропорциональна скорости протона $\vec{F}_m = -k\vec{\upsilon}$ ($k = 2{,}26 \cdot 10^{-20}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$), определите координату x_0 остановки протона. Заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

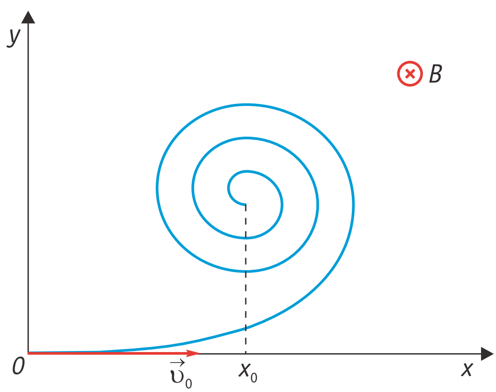

Рис.9

Решение. Пусть для произвольного момента времени (до остановки) протон имеет проекции скорости $\vec{\upsilon}$ на оси OX и OY равные υ_x и υ_y (рис.10).

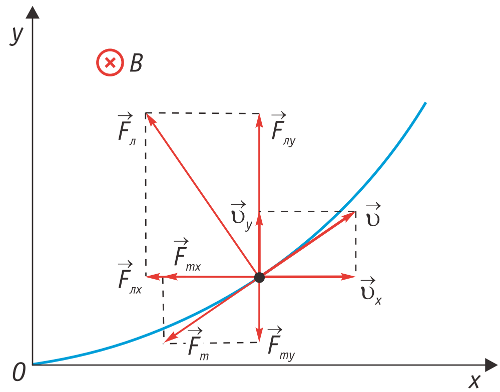

Рис.10

В этот момент на протон действуют две силы: сила Лоренца $\vec{F}_л$ и сила торможения $\vec{F}_m$ (результат взаимодействия протона с молекулами воды).

Уравнения движения протона вдоль осей OX и OY будут иметь вид:

$$m_p \frac{d\upsilon_x}{dt} = -q\upsilon_y B - k\upsilon_x,$$

$$m_p \frac{d\upsilon_y}{dt} = -q\upsilon_x B - k\upsilon_y.$$

Используя тот факт, что $\upsilon_x dt = dx$, $\upsilon_y dt = dy$, и поделив обе части уравнения на m_p, перепишем эти уравнения в другом виде:

$$d\upsilon_x = -\frac{q}{m_p} B dy - \frac{k}{m_p} dx, \qquad (1)$$

$$d\upsilon_y = -\frac{q}{m_p} B dx - \frac{k}{m_p} dy. \qquad (2)$$

Поскольку коэффициенты при dx и dy являются константами, которые не зависят ни от времени, ни от координат x и y, то систему уравнений (1) и (2) можно рассматривать как алгебраическую связь между малыми приращениями dx, dy, $d\upsilon_x$ и $d\upsilon_y$. Очевидно, что эта связь будет иметь место и между конечными приращениями этих величин с момента влёта протона и до момента его остановки. На примере переменной υ_x найдём полное её приращение:

$$\Delta\upsilon_x = \int_{\upsilon_0}^{0} d\upsilon_x = -\upsilon_0.$$

Заменяя в уравнениях (1) и (2) малые приращения на конечные, получим новую систему:

$$\upsilon_0 = \frac{q}{m_p} B y_0 + \frac{k}{m_p} x_0, \qquad (3)$$

$$0 = \frac{q}{m_p} B x_0 - \frac{k}{m_p} y_0. \qquad (4)$$

Здесь y_0 – координата остановившегося протона по оси OY.
Разрешая систему уравнений (3) и (4) относительно x_0, получим

$$x_0 = \frac{\dfrac{\upsilon_0 m_p}{qB} \cdot \dfrac{k}{qB}}{1 + \left(\dfrac{k}{qB}\right)^2} = \frac{R_0 \eta}{1+\eta^2} = 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Здесь R_0 – радиус орбиты протона при движении без торможения ($R_0 = 0,1$ м), а η – безразмерный параметр ($\eta = 1,41$).

Задача 6. В столбе газового разряда радиусом $R = 3$ см помимо упорядоченного движения электронов происходит их разогрев (хаотическое движение, возникающее из-за столкновений с атомами газа). Температура хаотического движения электронов $T_e = 10^6$ К. Определить силу тока J в столбе газового разряда, при которой электроны, обладающие среднестатистической скоростью теплового движения, не могут удалиться от поверхности столба на расстояние большее, чем $h = 2 \cdot 10^{-3}$ см («магнитная термоизоляция»). Указание: индукция магнитного поля вблизи поверхности проводника с током J на расстоянии r от его оси $B = \dfrac{\mu_0 J}{2\pi r}$.

Решение. Пусть в столбе газового разряда течёт ток J вдоль оси OX (рис. 11), а с поверхности столба из точки A вылетает электрон со средней скоростью υ_0 теплового движения электронов под некоторым углом α и имеет проекцию своей скорости на ось OX, равную υ_{0x}. Индукция B магнитного поля вне столба, создаваемая током J разряда, перпендикулярна плоскости рисунка и равна

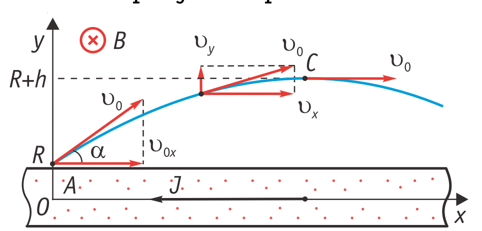

Рис.11

$$B(y)=\frac{\mu_0 J}{2\pi y}. \qquad (1)$$

Рассмотрим произвольный момент времени, когда проекции скорости электрона на оси OX и OY соответственно равны υ_x и υ_y. Уравнение движения электрона вдоль оси OX имеет вид:

$$m_e\frac{d\upsilon_x}{dt}=e\upsilon_y B(y), \qquad (2)$$

где m_e и e – масса и абсолютная величина заряда электрона. Умножим обе части уравнения (2) на dt и поделим на m_e и, учитывая, что $\upsilon_y dt = dy$, получим уравнение движения в других переменных:

$$d\upsilon_x=\frac{e}{m_e}B(y)dy. \qquad (3)$$

После подстановки (1) в (3) имеем

$$d\upsilon_x=\frac{\mu_0 eJ}{2\pi m_e}\frac{dy}{y}. \qquad (4)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (4) от точки A, где $\upsilon_x=\upsilon_{0x}$, а $y=R$, до точки C (максимальное удаление электрона от поверхности столба), где $\upsilon_x=\upsilon_0$, а $y=R+h$,

$$\int_{\upsilon_{0x}}^{\upsilon_0} d\upsilon_x=\frac{\mu_0 eJ}{2\pi m_e}\int_R^{R+h}\frac{dy}{y}.$$

После интегрирования получим

$$\upsilon_0-\upsilon_{0x}=\frac{\mu_0 eJ}{2\pi m_e}\ln\frac{R+h}{R}. \qquad (5)$$

Из этого соотношения видно, что величина h максимального удаления зависит от разности $\upsilon_0-\upsilon_{0x}$: чем больше эта разность, тем больше величина h удаления электрона. Максимальная величина этой разности скоростей будет для электрона, который вылетает под углом $\alpha=\pi$, его проекция скорости на ось OX равна $-\upsilon_0$, поэтому $\upsilon_0-\upsilon_{0x}=2\upsilon_0$.

Ещё одно замечание относительно равенства (5). В нашем случае $\frac{h}{R}\approx 10^{-3}$, т.е. много меньше единицы, а в этом случае

$$\ln\left(1+\frac{h}{R}\right)\approx\frac{h}{R}.$$

С учётом обоих замечаний равенство (5) запишется в виде:

$$2\upsilon_0=\frac{\mu_0 ehJ}{2\pi m_e R}.$$

Отсюда

$$J=\frac{4\pi\upsilon_0 m_e R}{\mu_0 eh}=5{,}7\cdot 10^5\ \text{А}.$$