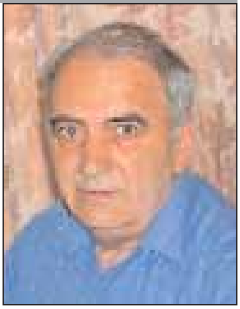


Можаев Виктор Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ), член редколлегии журнала «Квант».

Переходные процессы в электрических цепях

В статье разбираются задачи с электрическими цепями, в которых происходят переходные процессы. Речь идёт о достаточно медленных процессах, к которым в любой момент времени применимы правила Кирхгофа. Такие процессы называют квазистатическими.

В параграфе 1 рассматриваются переходные процессы в цепях с источниками постоянного тока, резисторами и конденсаторами. Параграф 2 включает в себя задачи с цепями, содержащими источники постоянного тока, резисторы и катушки самоиндукции. Задачи с электрическими цепями, в которые входит колебательный контур, разобраны в параграфе 3.

Для читателей с углублённым изучением физики предлагаются задачи повышенной трудности. Эти задачи помечены «звёздочкой».

Введение

Когда мы имеем дело с электрическими цепями, в состав которых входят источники постоянного напряжения и активные элементы (резисторы), то для определения токов в ветвях цепи можно составить (согласно правилам Кирхгофа) соответствующую систему алгебраических уравнений. В этих уравнениях отсутствует время, т. е. решения таких уравнений не зависят от времени: сразу после замыкания цепи в её элементах устанавливаются стационарные (не зависящие от времени) токи. Пренебрегая электродинамическими процессами (время их действия $\tau = \frac{l}{c}$, где l – размер цепи, а c – скорость света), можно сказать, что в этом случае переходный процесс отсутствует.

Другое дело, когда в цепи помимо активных элементов присутствуют реактив-

ные элементы, например, конденсаторы, катушки индуктивности. В этом случае после замыкания (или размыкания) цепи новое стационарное состояние устанавливается не сразу, ему предшествует переходный процесс. Это связано с инерционными свойствами реактивных элементов: конденсатор не может мгновенно зарядиться (или разрядиться), в противном случае ток зарядки (разрядки) должен быть бесконечно большим; резкому изменению тока в катушке индуктивности препятствует ЭДС индукции, возникающая в её витках. Переходные процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями, в которые уже входит время. Например, если через катушку индуктивности с индуктивностью L протекает переменный ток $I(t)$, то связь между ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ в катушке и этим током имеет вид: $\mathcal{E}_i = -L\dfrac{dI}{dt}$. Здесь $\dfrac{dI}{dt} = I'$ – производная тока по времени. Или, например, связь между током $I(t)$, втекающим в конденсатор ёмкостью C со стороны положительно заряженной пластины, и напряжением U на конденсаторе

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt}.$$

А дальше мы используем те же самые правила Кирхгофа, поскольку будем рассматривать достаточно медленные процессы, и вместо алгебраических уравнений получаем дифференциальные уравнения, в которых фигурирует время t.
Эти уравнения описывают весь процесс установления нового стационарного состояния.

Ниже мы разберём задачи, в которых присутствуют переходные процессы, но при ответе на поставленные вопросы нет необходимости решать дифференциальные уравнения, а можно воспользоваться общими законами физики, например, законом сохранения энергии.

Перейдём к разбору конкретных задач.

§1. Переходные процессы в цепях с источниками, резисторами и конденсаторами

Задача 1. В схеме, изображённой на рис. 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. 1) Определите ток в цепи и напряжение на конденсаторе сразу после замыкания ключа. 2) Найдите установившийся ток и напряжение на конденсаторе после окончания переходного процесса. Параметры схемы указаны на рис. 1. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

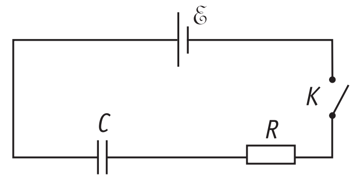


Рис.1

Решение. За бесконечно малое время замыкания ключа изменение заряда на конденсаторе будет также бесконечно мало, поскольку ток в цепи за это время будет иметь конечную величину. Максимально возможный ток в цепи равен $\dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Поэтому можно считать, что напряжение на конденсаторе не изменится и сразу после замыкания ключа будет равно $U_{c0} = 0$. Очевидно, из закона Ома для нашей замкнутой цепи следует, что начальный ток сразу после замыкания цепи $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$.

Затем начнётся переходный процесс: напряжение на конденсаторе будет расти, а ток в цепи уменьшаться. Из физических соображений понятно, что со временем напряжение на конденсаторе станет равным ЭДС батареи и ток в цепи прекратится. На этом переходный процесс закончится и установится стационарное состояние:

$$U_{ск} = \mathcal{E}, \quad I_к = 0.$$

На рис. 2 показаны зависимости тока в цепи и напряжения на конденсаторе от времени: $I(t)$ и $U_c(t)$.

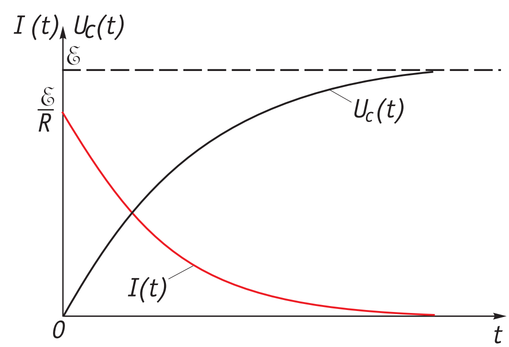


Рис.2

Задача 2. В схеме, изображённой на рис.3, в начальный момент ключ K разомкнут и напряжение на конденсаторе равно нулю. 1) Определите токи в ветвях цепи и напряжение на конденсаторе сразу после замыкания ключа. 2) Найдите установившиеся токи и напряжение на конденсаторе после окончания переходного процесса. Параметры схемы указаны на рис.3, внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

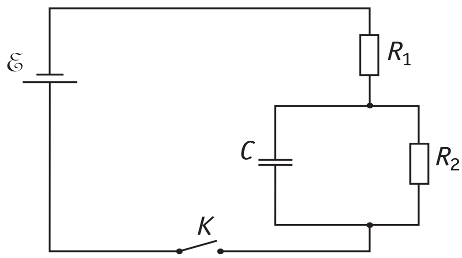


Рис. 3

Решение. За бесконечно малое время замыкания ключа заряд на конденсаторе не успеет измениться и к концу замыкания будет также бесконечно мал, поскольку максимально возможный ток через конденсатор равен $\frac{\mathcal{E}}{R_1}$. Поэтому можно считать, что напряжение на конденсаторе сразу после замыкания ключа $U_{c0}=0$. Но это напряжение будет и на резисторе R_2, поэтому (см. рис. 3′) $I_{20}R_2=0$.

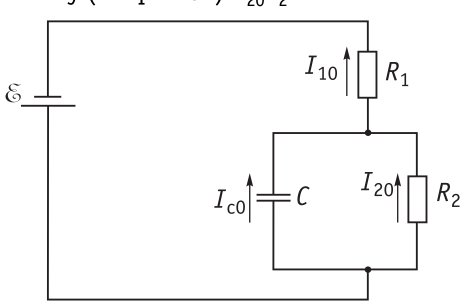


Рис. 3′

Отсюда ток через резистор R_2 сразу после замыкания ключа $I_{20}=0$. Второе правило Кирхгофа для контура, содержащего источник, резисторы R_1 и R_2, позволяет записать

$$\mathcal{E}=I_{10}R_1.$$

Тогда ток через резистор R_1 после замыкания ключа $$I_{10}=\frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

Очевидно, что ток через конденсатор I_{c0} будет равен току через резистор R_1, поэтому

$$I_{c0}=\frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

Поскольку через конденсатор течёт ток, следовательно, он заряжается, напряжение на нём растёт, а тогда начинает расти ток через резистор R_2 – возникает переходный процесс. Из физических соображений понятно, что после окончания переходного процесса и установления стационарного состояния на конденсаторе будет некоторое постоянное напряжение, а ток через конденсатор

$$I_{ск}=0.$$

Через резисторы R_1 и R_2 будут течь одинаковые токи $I_{1к}=I_{2к}$.

По второму правилу Кирхгофа для замкнутого контура, содержащего источник, резисторы R_1 и R_2,

$$\mathcal{E}=I_{1к}R_1+I_{2к}R_2.$$

Отсюда $$I_{1к}=I_{2к}=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}.$$

Установившееся напряжение на конденсаторе

$$U_{ск}=I_{2к}R_2=\frac{R_2\mathcal{E}}{R_1+R_2}.$$

Задача 3. Какое количество теплоты выделится в цепи, изображённой на рис.4, после размыкания ключа K? Параметры схемы: ЭДС батареи $\mathcal{E}=120\,В$, $R_1=40$ кОм, $R_2=80$ кОм, ёмкость конденсатора $C=20$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение. При замкнутом ключе в установившемся режиме через резистор R_2 течёт постоянный ток

$$I_2=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}.$$

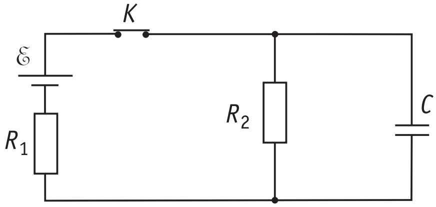


Рис. 4

Напряжение на конденсаторе постоянно и равно

$$U_c = I_2 R_2 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

Сразу после размыкания ключа напряжение на конденсаторе и ток через резистор R_2 останутся неизменными. Начнётся переходный процесс: конденсатор будет разряжаться через резистор R_2. Конечное состояние очевидно: ток и напряжение будут равны нулю. По закону сохранения энергии весь запас энергии конденсатора перейдёт в теплоту, которая выделится в резисторе R_2. Начальная энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{CU_c^2}{2} = \frac{CR_2^2 \mathcal{E}^2}{2(R_1 + R_2)^2}.$$

Поскольку конечная энергия конденсатора $W_2 = 0$, то количество теплоты

$$Q = W_1 = \frac{CR_2^2 \mathcal{E}^2}{2(R_1 + R_2)^2} = 6{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Задача 4. В схеме, изображённой на рис.5, при разомкнутом ключе K конденсаторы с ёмкостями C_1 и C_2 заряжены (каждый) от батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 120$ В. Ключ замыкают. 1) Чему будет равен ток в цепи сразу после замыкания ключа, если сопротивление резистора R = 200 Ом? 2) Какие напряжения установятся на конденсаторах, если $\frac{C_1}{C_2} = 5$? 3) Какое количество теплоты выделится в резисторе за время установления нового равновесного состояния, если C_2 = 1,0 мкФ ?

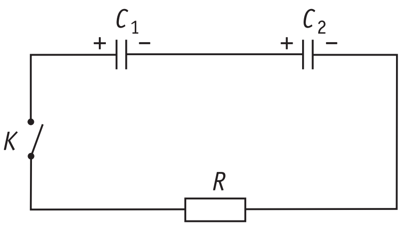


Рис. 5

Решение. Как до замыкания, так и сразу после замыкания ключа суммарное напряжение на конденсаторах будет равно $2\mathcal{E}$. Поэтому согласно закону Ома для резистора начальный ток будет равен

$$I_0 = \frac{2\mathcal{E}}{R} = 1{,}2\ \text{А}.$$

После этого начнётся переходный процесс. Поскольку заряд на каждом из конденсаторов уменьшается, то и суммарное напряжение на конденсаторах падает, а вместе с ним будет спадать и ток в цепи до тех пор, пока не станет равным нулю. Прекращение тока наступит в момент установления нового стационарного состояния нашей системы.

Пусть за время всего переходного процесса в цепи протечёт заряд, равный q. Тогда напряжение на конденсаторе C_1 согласно закону сохранения заряда

$$U_1 = \frac{C_1 \mathcal{E} - q}{C_1}. \qquad (1)$$

Аналогично на конденсаторе C_2:

$$U_2 = \frac{C_2 \mathcal{E} - q}{C_2}. \qquad (2)$$

Отсутствие тока в цепи будет означать, что

$$U_1 + U_2 = 0. \qquad (3)$$

После подстановки (1) и (2) в (3) получим

$$q = -\frac{2C_1C_2\mathscr{E}}{C_1+C_2}.$$

Установившиеся напряжения на конденсаторах

$$U_1 = \frac{(C_1-C_2)\mathscr{E}}{C_1+C_2} = \frac{2}{3}\mathscr{E} = 80\ \text{В},$$

$$U_2 = -\frac{(C_1-C_2)\mathscr{E}}{C_1+C_2} = -80\ \text{В}.$$

По закону сохранения энергии найдём количество теплоты, которое выделится в резисторе после замыкания ключа. Начальная энергия конденсаторов

$$W_1 = \frac{C_1\mathscr{E}^2}{2} + \frac{C_2\mathscr{E}^2}{2} = \frac{(C_1+C_2)\mathscr{E}^2}{2}.$$

Конечная энергия конденсаторов

$$W_2 = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{2}{9}(C_1+C_2)\mathscr{E}^2.$$

Выделившееся количество теплоты

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{5}{18}(C_1+C_2)\mathscr{E}^2 = \frac{5}{3}C_2\mathscr{E}^2 =$$

$$= 2{,}4\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

Задача 5. В схеме на рис.6 ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы с ёмкостями C и $2C$ не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1 и в результате на конденсаторе ёмкостью C устанавливается напряжение $U_1 = 6$ В. 1) Найти ЭДС источника. Затем замыкают ключ K_2. 2) Определить новое установившееся значение напряжения на том же конденсаторе.

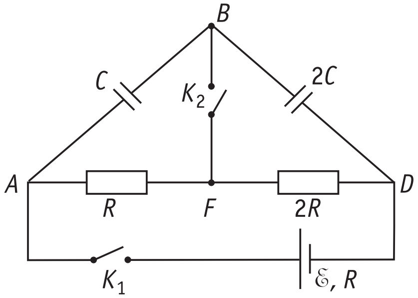


Рис. 6

Решение. После замыкания ключа K_1 возникнет переходный процесс, произойдёт зарядка конденсаторов и ток будет течь только по контуру, охватывающему батарею и оба резистора. По закону Ома величина тока

$$I = \frac{\mathscr{E}}{4R}. \qquad (1)$$

Ток направлен по часовой стрелке. Разность потенциалов между точками A и D (см. рис.6)

$$U_{AD} = 3RI = \frac{3}{4}\mathscr{E}.$$

Поскольку ёмкость наших последовательно соединённых конденсаторов

$$C_{общ} = \frac{C\cdot 2C}{C+2C} = \frac{2}{3}C,$$

то заряд на каждом из конденсаторов

$$q = C_{общ}U_{AD} = \frac{1}{2}C\mathscr{E},$$

а напряжение на левом конденсаторе

$$U_1 = \frac{q}{C} = \frac{1}{2}\mathscr{E}.$$

Отсюда $\qquad \mathscr{E} = 2U_1 = 12$ В.

Разность потенциалов между точками A и B равна 6 B, а между точками A и F

$$U_{AF} = IR = \frac{1}{4}\mathscr{E} = 3\ \text{В}.$$

Следовательно, точки B и F не являются эквипотенциальными точками, поэтому после замыкания ключа K_2 через перемычку BF потечёт ток и будет происходить перезарядка конденсаторов. После окончания переходного процесса ток снова течёт только по контуру, включающему батарею и два резистора, а его величина определяется (1). Потенциалы точек B и F теперь равны, а напряжение на конденсаторе C равно напряжению на резисторе R:

$$U_2 = IR = \frac{1}{4}\mathscr{E} = 3\ \text{В}.$$

§2. Переходные процессы в цепях с источниками, резисторами и катушками индуктивности

Задача 6. В схеме, изображённой на рис.7, в начальный момент ключ K разомкнут. 1) Определите ток в цепи сразу после замыкания ключа. 2) Найдите установившийся ток в цепи после окончания переходного процесса. Параметры схемы указаны на рис. 7, внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

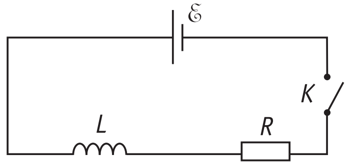


Рис.7

Решение. Рассмотрим сам процесс замыкания цепи. Пусть в произвольный момент времени (во время замыкания) ток в цепи равен $I(t)$. На основании закона Ома для замкнутого контура, охватывающего нашу цепь, можно записать

$$\mathcal{E} - L\cdot\frac{dI(t)}{dt} = I(t)R\ .$$

Перепишем это уравнение в виде

$$d\left[LI(t)\right] = \left(\mathcal{E} - I(t)R\right)dt\ .$$

Поскольку процесс замыкания происходит за бесконечно малое время τ, а ток $I(t)$ не может быть бесконечно большим (из энергетических соображений), то

$$d\left[LI(t)\right] \approx \left[\mathcal{E} - I(t)R\right]\tau \approx 0\ .$$

Отсюда следует, что магнитный поток через катушку за время замыкания остаётся неизменным:

$$LI(t) = const\ .$$

Так как перед замыканием ток в цепи был равен нулю, то и после окончания замыкания он остаётся нулевым: $I(\tau) = 0$.

После того, как цепь будет замкнута, ток в цепи начнёт нарастать в направлении действия ЭДС батареи. В конце концов наступит стационарный режим: в цепи будет течь постоянный ток $I_к$ и ЭДС индукции станет равной нулю. Величину этого тока можно найти по закону Ома для замкнутого контура:

$$\mathcal{E} = I_к R\ .$$

Отсюда
$$I_к = \frac{\mathcal{E}}{R}\ .$$

Процесс установления тока в нашей цепи после замыкания ключа изображён на рис.8.

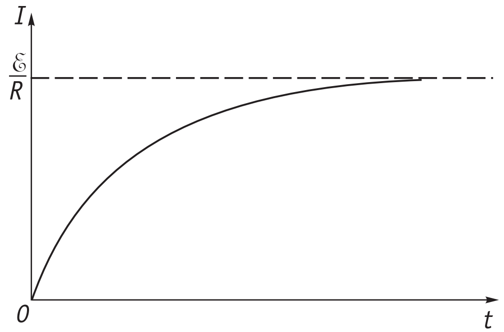


Рис. 8

Задача 7. В схеме, изображённой на рис. 9, в начальный момент ключ K разомкнут. 1) Определите ток в ветвях цепи сразу после замыкания ключа. 2) Найдите установившиеся токи в цепи после окончания переходного процесса. Параметры схемы указаны на рис. 9. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

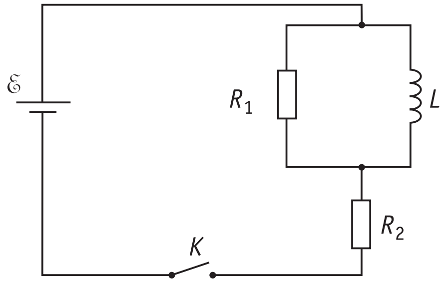


Рис. 9

Решение. Пусть сразу после замыкания ключа в ветвях цепи текут токи I_{10}, I_{20} и I_{L0} (рис.10). Покажем, что $I_{L0} = 0$, хотя это почти очевидно.

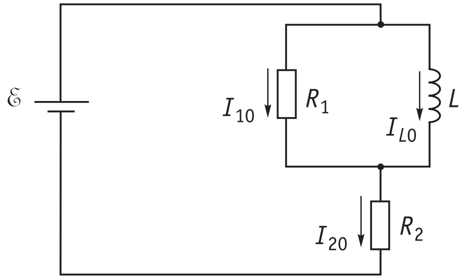


Рис. 10

Запишем уравнение второго правила Кирхгофа для замкнутого контура, охватывающего резистор R_1 и катушку L, во время промежутка времени Δt замыкания цепи, которое можно считать бесконечно малым: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I_1(t)\cdot R_1$, где Φ – магнитный поток через витки катушки, а $I_1(t)$ – ток через резистор R_1 в произвольный момент во время замыкания. Поскольку величина тока $I_1(t)$ не может быть бесконечно большой (по энергетическим соображениям), а время Δt бесконечно малое, то

$$\Delta\Phi = I_1(t)\cdot R_1 \Delta t \approx 0\,.$$

А это означает, что за время замыкания магнитный поток через катушку должен сохраниться:

$$\Phi = const\,.$$

Но начальный магнитный поток (до замыкания ключа) был равен нулю, поэтому он будет равен нулю и сразу после замыкания и, следовательно,

$$I_{L0} = 0\,. \qquad (1)$$

Теперь можно найти токи I_{10} и I_{20}. Из (1) следует, что

$$I_{10} = I_{20}\,. \qquad (2)$$

По второму правилу Кирхгофа для контура, содержащего резисторы и источник,

$$\mathcal{E} = I_{10}R_1 + I_{20}R_2\,. \qquad (3)$$

Из совместного решения (2) и (3) находим

$$I_{10} = I_{20} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}\,.$$

Такое состояние токов в данной схеме неустойчивое: ток через катушку не может оставаться постоянным при постоянном токе через резистор R_1 (нарушение закона Ома для замкнутого контура). Ток через катушку начнёт возрастать, а ток через резистор R_1 уменьшаться, начнётся переходный процесс. Из физических соображений понятно, что переходный процесс закончится устойчивым стационарным состоянием. Обозначим установившиеся значения токов через $I_{1\text{к}}$, $I_{2\text{к}}$ и $I_{L\text{к}}$. Пусть через катушку течёт постоянный ток $I_{L\text{к}}$, тогда ЭДС индукции в катушке равна нулю и, следовательно, напряжение на резисторе R_1 также равно нулю и токи

$$I_{1\text{к}} = 0\,,\ I_{L\text{к}} = I_{2\text{к}}\,. \qquad (4)$$

В этом случае второе правило Кирхгофа для контура, содержащего источник и оба резистора, позволяет записать

$$\mathcal{E} = I_{2\text{к}}R_2\,. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получаем $I_{L\text{к}} = I_{2\text{к}} = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$.

Задача 8*. В схеме, изображённой на рис.11, в начальный момент ключ K разомкнут. Внутреннее сопротивление батареи и сопротивление перемычки AB пренебрежимо малы. Ключ замыкают. 1) Определить ток через перемычку сразу после замыкания ключа. 2) Какой ток установится в перемычке после окончания переходного процесса? 3) Найдите зависимость тока в перемычке от времени после замыкания ключа. Параметры схемы, указанные на рис. 11, считать заданными.

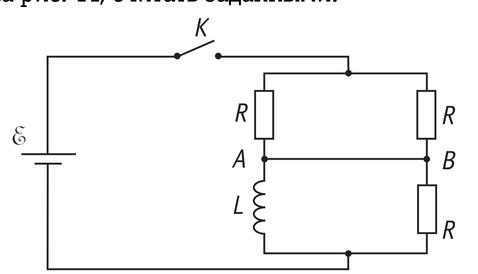


Рис. 11

Решение. Сразу после замыкания ключа ток через катушку самоиндукции L будет равен нулю. Это связано с сохранением магнитного потока через витки катушки.

Начальный магнитный поток (до замыкания ключа) был равен нулю и за короткое время включения возникающая в витках ЭДС индукции сохранит этот поток.

Очевидно, что сразу после замыкания ключа эквивалентная схема внешней нагрузки будет состоять из двух параллельно соединённых резисторов (верхних) и последовательно соединённого с ними резистора (нижнего). Поскольку сопротивления всех резисторов равны, то их общее сопротивление

$$R_{общ} = \frac{3}{2}R .$$

Общий ток в цепи (ток через батарею)

$$I_{общ} = \frac{\mathcal{E}}{R_{общ}} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{R} .$$

Ток через перемычку

$$I_{по} = \frac{I_{общ}}{2} = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{E}}{R}$$

и направлен от A к B.

После окончания переходного процесса в схеме будут течь постоянные токи, но импеданс (сопротивление) идеальной катушки по постоянному току равен нулю, поэтому катушка станет шунтировать нижний резистор и ток будет течь только через неё. Эквивалентная схема внешней нагрузки в этом случае состоит из двух параллельно соединённых резисторов (верхних) и последовательно соединённой с ними катушки с нулевым сопротивлением. Общее сопротивление такой цепи

$$R'_{общ} = \frac{R}{2} .$$

Установившийся ток через перемычку

$$I_{п\,уст} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R'_{общ}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

и направлен от B к A.

Нахождение временно́й зависимости тока через перемычку с математической стороны выходит за рамки школьной программы, поэтому мы акцентируем внимание на получении дифференциального уравнения, которое описывает эту зависимость $I_п(t)$. Затем напишем решение этого уравнения и изобразим зависимость $I_п(t)$ на графике.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. На рис.12 показаны введённые обозначения токов для данного момента времени. Поскольку разность потенциалов между точками A и B в любой момент времени равна нулю, то токи через верхние резисторы всегда равны. Итак, мы имеем четыре неизвестных: I, $I_п$, I_L и I_R. Наша задача составить четыре уравнения.

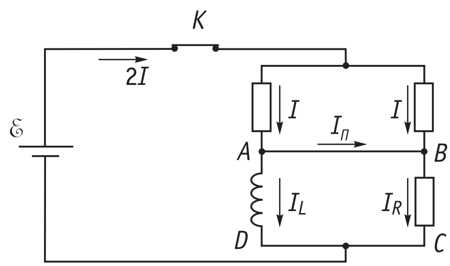


Рис. 12

Для этого воспользуемся правилами Кирхгофа. Для узла A

$$I = I_п + I_L . \qquad (1)$$

Для узла B

$$I + I_п = I_R . \qquad (2)$$

Для контура ABCD

$$L\frac{dI_L}{dt} = I_R R . \qquad (3)$$

Для контура, охватывающего батарею, верхний (правый) резистор, нижний резистор

$$\mathcal{E} = IR + I_R R + 2I \cdot 0 . \qquad (4)$$

Из совместного решения уравнений (1), (2), (3) и (4) получим дифференциальное уравнение относительно тока через перемычку $I_п$:

$$\frac{dI_п}{dt} + \frac{R}{3L} I_п = -\frac{\mathscr{E}}{3L}.$$

Решение этого уравнения даёт зависимость тока через перемычку от времени t:

$$I_п(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(\frac{4}{3}e^{-\frac{Rt}{3L}} - 1\right).$$

Как видно из записанного решения, начальный ток $I_{по} = I_п(0) = \frac{\mathscr{E}}{3R}$, а при $t \to \infty$ получим установившийся ток

$$I_п(\infty) = -\frac{\mathscr{E}}{R}, \ \left|I_п(\infty)\right| = I_{п\,уст}.$$

Зависимость тока через перемычку от времени изображена на рис. 13.

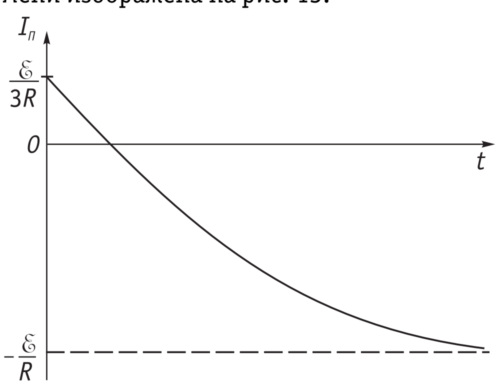


Рис. 13

§3. Переходные процессы в цепях с колебательным контуром.

Задача 9[*]. В колебательном контуре при разомкнутом ключе K происходят затухающие колебания тока (см. рис. 14). В тот момент, когда ток в контуре достигает максимального значения и равен I_{max}, замыкают ключ. Определить количество теплоты, которое выделится в резисторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке.

Решение. Поскольку перед замыканием ключа ток в контуре максимален, то ЭДС самоиндукции в катушке L_1 равна нулю, и напряжение на конденсаторе

$$U_c = I_{max} R.$$

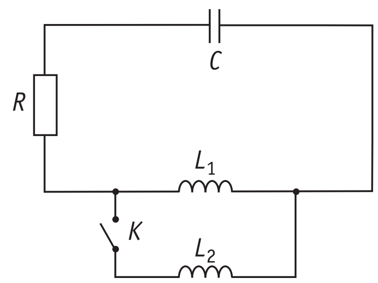


Рис. 14

Энергия, запасённая в контуре перед замыканием ключа,

$$W_1 = \frac{L_1 I_{max}^2}{2} + \frac{C U_c^2}{2} = \frac{L_1 I_{max}^2}{2} + \frac{C R^2 I_{max}^2}{2}.$$

После замыкания ключа со временем колебания в контуре затухнут и суммарный ток через резистор будет равен нулю. Но это не означает, что каждый из токов через катушки также будет равен нулю. Пусть в некоторой момент времени в процессе затухания колебаний через катушку L_1 течёт ток I_1, а через катушку L_2 ток I_2 в том же направлении. По второму правилу Кирхгофа для контура, охватывающего обе катушки, можно записать

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Так как L_1 и L_2 константы, то это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\left(L_1 I_1 - L_2 I_2\right)}{dt} = 0.$$

Поскольку производная от выражения в скобках равна нулю, то

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = Const.$$

Константу найдём из начальных условий сразу после замыкания ключа. Поскольку в этот момент $I_1 = I_{max}$, а $I_2 = 0$, то

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = L_1 I_{max}. \qquad (1)$$

Условие отсутствия тока через резистор запишется в виде

$$I_1 + I_2 = 0. \qquad (2)$$

Из совместного решения (1) и (2) найдём, что

$$I_{1к} = -I_{2к} = \frac{L_1 I_{max}}{L_1 + L_2},$$

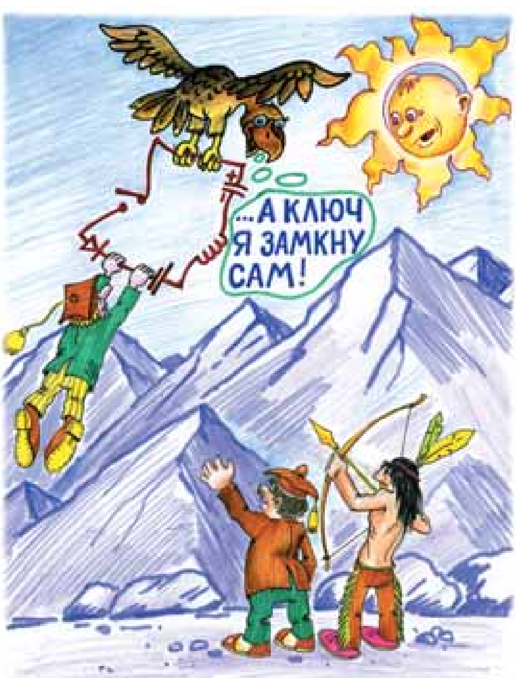
где $I_{1к}$ и $I_{2к}$ – токи в катушках после затухания колебаний в контуре. Следовательно, после прекращения колебаний в контуре через катушки будет циркулировать постоянный ток и энергия магнитного поля катушек равна

$$W_2 = \frac{L_1 I_{1к}^2}{2} + \frac{L_2 I_{2к}^2}{2} = \frac{L_1^2 I_{max}^2}{2(L_1 + L_2)}.$$

Очевидно, что количество теплоты, которое выделится в резисторе, равно

$$Q = W_1 - W_2 = \left(R^2 C + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\right)\frac{I_{max}^2}{2}.$$

Задача 10*. В схеме, изображённой на рис.15, при разомкнутом ключе K конденсатор ёмкостью C = 20 мкФ заряжен до напряжения U_0 = 12 В. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 5$ В, индуктивность катушки L = 0,2 Гн, D – идеальный диод. Ключ замыкают.1) Определить установившееся напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. 2) Найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени. 3) Определить время переходного процесса.



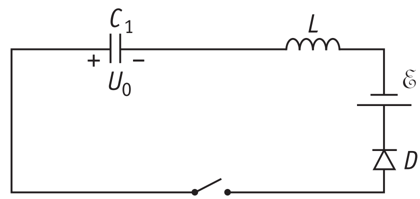


Рис. 15

Решение. Ответить на первый вопрос мы можем, не зная временно́й зависимости напряжения на конденсаторе. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии для нашей замкнутой системы. Из физических соображений понятно, что поскольку $U_0 > \mathscr{E}$, то после замыкания ключа в цепи потечёт ток и конденсатор будет разряжаться. Через некоторое время ток в цепи будет равен нулю, а напряжение на конденсаторе станет $U_к$. Это и будет установившееся напряжение на конденсаторе, поскольку ток в обратном направлении течь не может из-за диода. Изменение энергии катушки равно нулю. По закону сохранения энергии изменение энергии конденсатора равно работе батареи:

$$\frac{CU_к^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2} = (CU_к - CU_0)\mathscr{E}.$$

Данное уравнение имеет два решения :

$$U_{к1} = U_0 \quad \text{и} \quad U_{к2} = 2\mathscr{E} - U_0 = -2 \text{ В}.$$

Первое решение соответствует начальному состоянию, которое является неустойчивым, а второе решение – конечное состояние (устойчивое). Знак минус означает, что конденсатор не только полностью разрядится, но даже перезарядится (изменится полярность).

Для нахождения временно́й зависимости напряжения на конденсаторе рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент напряжение на конденсаторе равно U_c (с начальной полярностью), а ток в цепи I (против часовой стрелки). Для замкнутой цепи:

$$\mathscr{E} + L\frac{dI}{dt} = U_c. \qquad (1)$$

Ток $$I=-C\frac{dU_c}{dt}. \qquad (2)$$

Продифференцируем обе части уравнения (2) по времени:

$$\frac{dI}{dt}=-C\frac{d^2U_c}{dt^2}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим уравнение, которое описывает зависимость $U_c(t)$:

$$\frac{d^2U_c}{dt^2}+\frac{1}{LC}U_c=\frac{\mathcal{E}}{LC}. \qquad (4)$$

Введём новую переменную $V=U_c-\mathcal{E}$. Уравнение (4) запишется в виде:

$$\frac{d^2V}{dt^2}+\omega_0^2V=0, \qquad (5)$$

где $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$. Это уравнение описывает гармонические колебания в нашем колебательном контуре, а ω_0 – резонансная частота контура. Решение уравнения (5) ищем в виде:

$$V(t)=A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t, \qquad (6)$$

где A и B – константы, которые находятся из начальных условий. При $t=0$ $U_c(0)=U_0$, $V(0)=U_0-\mathcal{E}$ и уравнение (6) принимает вид

$$U_0-\mathcal{E}=A.$$

Второе начальное условие: начальный ток равен нулю ($I(0)=0$). Поскольку ток

$$I=-C\frac{dU_c}{dt}=-C\frac{dV_c}{dt},$$

то, используя решение (6), получим, что

$$I=A\omega_0C\sin\omega_0t-B\omega_0C\cos\omega_0t. \qquad (7)$$

При $t=0$ (7) принимает вид

$$0=-B\omega_0C.$$

Следовательно, $A=U_0-\mathcal{E}$, $B=0$ и

$$V(t)=(U_0-\mathcal{E})\cos\omega_0t.$$

Поскольку $U_c=V+\mathcal{E}$, то имеем следующую зависимость напряжения на конденсаторе от времени:

$$U_c(t)=(U_0-\mathcal{E})\cos\omega_0t+\mathcal{E}. \qquad (8)$$

Подставляя выражение для A в (7), получим зависимость тока от времени:

$$I(t)=(U_0-\mathcal{E})\omega_0C\sin\omega_0t.$$

Переходный процесс закончится, когда ток снова станет равным нулю, т.е.

$$\omega_0t_к=\pi.$$

Отсюда время переходного процесса

$$t_к=\frac{\pi}{\omega_0}=\pi\sqrt{LC}=6{,}28\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

Если мы теперь подставим $t_к$ в (8), то получим конечное напряжение на конденсаторе

$$U_к=U_c(t_к)=2\mathcal{E}-U_0.$$

Зависимость тока $I(t)$ и напряжения на конденсаторе $U_c(t)$ после замыкания ключа показаны на рис.16. Чёрная линия соответствует $I(t)$ (без масштаба по вертикали), а красная линия – $U_c(t)$ в вольтах.

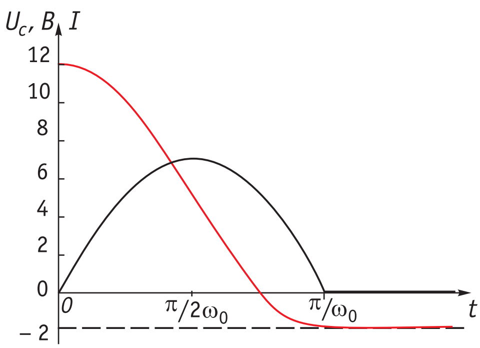


Рис. 16