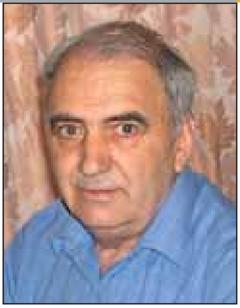

Можаев Виктор Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ), член редколлегии журнала «Квант».

Диэлектрик в плоском конденсаторе

В статье рассматриваются различные варианты заполнения плоского конденсатора диэлектриком. При решении задач такого типа используется метод эквивалентных схем. Проводится разбор задач по вычислению минимальной работы, необходимой для заполнения диэлектриком плоского конденсатора, а также расчёт сил, действующих на диэлектрик, частично вдвинутый в плоский конденсатор. В обоих случаях используется энергетический метод расчёта.

Диэлектрики отличаются от проводников главным образом тем, что в них по сравнению с металлами почти нет свободных электронов и поэтому они практически не проводят электрический ток. По этой же причине они совершенно по-разному ведут себя во внешнем электростатическом поле: свободные электроны проводников полностью экранируют внешнее поле, они перераспределяются так, что поле внутри проводника равно нулю, в то время как диэлектрики лишь частично уменьшают внешнее поле и не за счёт свободных электронов, а в результате *поляризации* молекул (атомов) диэлектрика. В случае однородной поляризации, например, когда плоский заряженный конденсатор полностью заполнен диэлектриком (твёрдым, жидким, газообразным), на поверхностях диэлектрика, которые соприкасаются с обкладками конденсатора, появляются *связанные (поляризационные) заряды*: у положительно заряженной обкладки – отрицательные связанные заряды, а у отрицательно заряженной – положительные. Суммарный связанный заряд естественно равен нулю, поскольку диэлектрик электронейтрален. Эти связанные заряды создают своё поле, которое направлено навстречу внешнему и частично компенсирует его. Степень компенсации внешнего поля зависит от молекулярного (атомного) строения диэлектрика и от конфигурации того объёма, который он занимает.

Пусть в окружающем пространстве имеется некоторое распределение свободных зарядов. Если мы сохраним это распределение и заполним всё пространство, где поле не равно нулю, диэлектриком, то напряжённость поля повсюду уменьшится в ε раз. Физическую характеристику диэлектрика ε называют *диэлектрической проницаемостью* данного вещества. Типичным примером такой ситуации являются заряженные конденсаторы (плоский, сферический или цилиндрический). Если мы сохраним распределение зарядов на таком конденсаторе и полностью заполним его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то напряжённость поля в любой точке внутри конденсатора уменьшится в ε раз, а ёмкость такого конденсатора увеличится во столько же раз. А вот если мы будем поддерживать постоянную разность потенциалов между обкладками конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком поле внутри него не изменится. Сохранение величины поля приводит к росту свободных зарядов на обкладках конденсатора в ε раз.

Еще одним фактором, влияющим на величину напряжённости поля в диэлектрике, является конфигурация той части пространства, которая заполнена диэлектриком. Для диэлектрика произвольной формы это чрезвычайно сложная задача. Ниже мы разберём конкретные примеры, в которых ограничимся наиболее простыми формами диэлектрика: тонкая пластина или слой диэлектрика между двумя сферическими поверхностями.

Задача 1

Плоский воздушный конденсатор ёмкостью C_0 присоединён к источнику тока, который поддерживает на пластинах конденсатора разность потенциалов U. 1) Какой заряд протечёт через источник при заполнении пространства между обкладками жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε? 2) Чему будет равна величина связанного заряда диэлектрика у поверхности пластин конденсатора?

Решение

Очевидно, что заряд на нашем воздушном конденсаторе до заполнения диэлектриком равен

$$Q_0 = C_0 U.$$

После заполнения диэлектрической жидкостью ёмкость конденсатора увеличится в ε раз:

$$C_1 = \varepsilon C_0.$$

Новый заряд на конденсаторе после заполнения жидкостью

$$Q_1 = \varepsilon C_0 U.$$

Изменение заряда на конденсаторе произойдёт за счёт заряда, который протёк через батарею:

$$\Delta Q_{бат} = Q_1 - Q_0 = (\varepsilon - 1) C_0 U.$$

После того, как жидкость заполнила конденсатор, на его обкладках находится свободный заряд Q_1, а на поверхности диэлектрика в результате поляризации появится связанный заряд $q_{связ}$ (рис. 1). Найдём величину этого заряда. Напряжённость электрического поля в жидкости внутри конденсатора

$$E = \frac{U}{d}, \qquad (1)$$

где d – расстояние между обкладками конденсатора.

С другой стороны, поле в конденсаторе выражается через суммарный (свободный плюс связанный) заряд у поверхности пластин:

$$E = \frac{Q_1 - q_{связ}}{\varepsilon_0 S}, \qquad (2)$$

где S – площадь пластин. Приравнивая (1) и (2), получим

$$q_{связ} = Q_1 - \frac{\varepsilon_0 S U}{d} = (\varepsilon - 1) C_0 U.$$

Мы нашли, что связанный заряд равен притекшему на пластины свободному заряду, так и должно быть, поскольку поле внутри конденсатора остаётся неизменным.

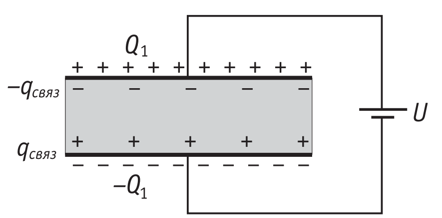

Рис. 1

Задача 2

Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами частично заполнен диэлектриком, как это изображено на рис. 2а, 2б. Определите напряжённость электрического поля внутри диэлектрика, если заряд на обкладках конденсатора равен Q, площадь пластин S, диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε. Размеры диэлектрика указаны на рисунках.

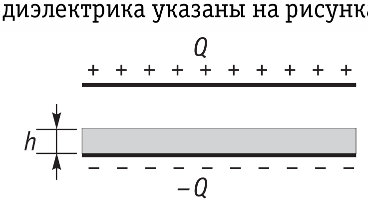

Рис. 2а

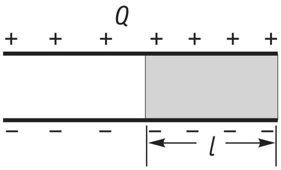

Рис. 2б

Решение

Рассмотрим случай, когда конденсатор частично заполнен слоем диэлектрика толщиной h (рис. 2а). В отсутствие диэлектрика напряжённость электрического поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \qquad (1)$$

При таком частичном заполнении мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединённых конденсаторов: один – воздушный с ёмкостью

$$C_{возд} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h},$$

а другой – полностью заполненный диэлектриком, ёмкость которого

$$C_{диэл} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h}.$$

На каждом из конденсаторов находится заряд Q, поэтому разность потенциалов на заполненной части конденсатора

$$U_{диэл} = \frac{Q}{C_{диэл}} = \frac{Qh}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Тогда напряжённость поля в заполненном конденсаторе

$$E_{диэл} = \frac{U_{диэл}}{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Сравнивая полученное выражение с (1), мы видим, что напряжённость поля в диэлектрике уменьшилась в ε раз и это ослабление поля не зависит от толщины слоя диэлектрика. При таком способе заполнения происходит максимальное ослабление поля в диэлектрике.

Перейдём ко второму случаю (рис. 2б). В этом случае мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух параллельно соединённых конденсаторов с ёмкостями:

$$C_{возд} = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S}(\sqrt{S}-l)}{d} \quad \text{и} \quad C_{диэл} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} \cdot l}{d},$$

где $\sqrt{S}$ – размер обкладок конденсатора. Общая ёмкость конденсатора

$$C_{общ} = C_{возд} + C_{диэл} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left[1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right].$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$U = \frac{Q}{C_{общ}} = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_0 S\left[1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right]},$$

а напряжённость поля в диэлектрике

$$E_{диэл} = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S\left[1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right]}.$$

Проанализируем полученное выражение на предмет зависимости $E_{диэл}$ от l.

При стремлении l к $\sqrt{S}$ поле в диэлектрике уменьшается и стремится к значению

$$E_{диэл}(\sqrt{S}) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

а при стремлении l к нулю поле растёт и при $l = 0$

$$E_{диэл}(0) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

При произвольном l поле в диэлектрике

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \le E_{диэл}(l) \le \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Задача 3

Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями разнородных диэлектриков: слой толщиной h_1 с диэлектрической проницаемостью ε_1, а слой толщиной h_2 – с ε_2. Площадь обкладок S, расстояние между ними равно $h_1 + h_2$. 1) Определите ёмкость такого конденсатора. 2) Найдите напряжённости электрического поля внутри каждого из слоёв, если заряд на обкладках равен Q.

Решение

Будем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединённых конденсаторов C_1 и C_2 с ёмкостями:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{h_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{h_2}.$$

Ёмкость такой системы

$$C_{общ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{h_2}{\varepsilon_2} + \frac{h_1}{\varepsilon_1}\right)}.$$

Разность потенциалов U_1 на конденсаторе ёмкостью C_1.

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q \cdot h_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}.$$

Разность потенциалов U_2 на конденсаторе ёмкостью C_2

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q \cdot h_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}.$$

Напряжённость поля внутри конденсатора ёмкостью C_1

$$E_1 = \frac{U_1}{h_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}.$$

Напряжённость поля внутри конденсатора ёмкостью C_2

$$E_2 = \frac{U_2}{h_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}.$$

Задача 4

Диэлектрическая пластина толщиной l_2 с диэлектрической проницаемостью ε введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (рис. 3). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1. Определите силу притяжения между обкладками, если разность потенциалов между ними равна U, а площадь пластин S.

Решение

Конденсатор при таком заполнении диэлектриком эквивалентен двум последовательно соединённым конденсаторам, один из которых воздушный с ёмкостью

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{l_1},$$

а другой, заполненный диэлектриком, с ёмкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l_2}.$$

Это можно показать, рассмотрев искомый конденсатор, как последовательное соединение трёх конденсаторов: воздушного с расстоянием x между обкладками (x – расстояние от верхней обкладки искомого конденсатора до диэлектрической пластины), конденсатора с диэлектриком толщиной l_2 и воздушного конденсатора с расстоянием между обкладками $l_1 - x$. (Примечание редакции журнала.)

Общая ёмкость конденсатора

$$C_{общ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

Заряд на обкладках конденсатора

$$Q = C_{общ} \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

Разность потенциалов на конденсаторе C_1

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{\varepsilon U l_1}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

Напряжённость поля в воздушном зазоре конденсатора

$$E_1 = \frac{U_1}{l_1} = \frac{\varepsilon U}{l_2 + \varepsilon l_1}.$$

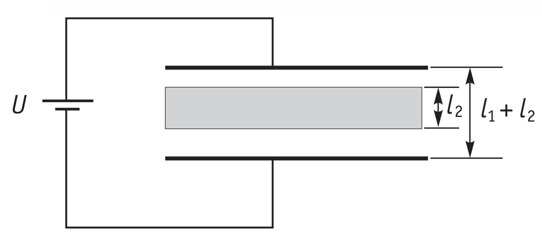

Рис. 3

Сила, действующая на обкладку конденсатора,

$$F = Q\cdot\frac{E_1}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon^2 S U^2}{2\left(l_2+\varepsilon l_1\right)^2}.$$

При написании выражения для силы F заряд обкладки умножается на половину величины поля у обкладки. Это связано с тем, что напряжённость E_1 поля создаётся зарядами обеих обкладок, а мы должны умножать на поле, создаваемое только одной обкладкой: собственное поле обкладки на свои заряды не действует.

Задача 5

Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d, полностью заполнен твёрдым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор подключён к батарее, ЭДС которой равна $\mathscr{E}$. Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом внешними силами была совершена работа A?

Решение

Решение данной задачи проведём с помощью закона сохранения энергии. Перемещая пластину конденсатора, мы совершаем работу A, одновременно с этим батарея совершает работу $A_{бат}$, перемещая заряд с одной пластины на другую. Обе эти работы идут на изменение энергии конденсатора:

$$A + A_{бат} = W_2 - W_1. \qquad (1)$$

В исходном состоянии заряд конденсатора

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}\mathscr{E}.$$

Энергия, запасённая в конденсаторе,

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathscr{E}^2}{2d}.$$

После перемещения пластины ёмкость конденсатора равна ёмкости двух последовательно соединённых конденсаторов:

$$C_2 = \frac{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}\cdot\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}}{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}+\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d+\varepsilon x}.$$

Новый заряд на конденсаторе

$$Q_2 = C_2\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathscr{E}}{d+\varepsilon x}.$$

Энергия конденсатора после перемещения

$$W_2 = C_2\frac{\mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathscr{E}^2}{2\left(d+\varepsilon x\right)}.$$

Заряд, протёкший через батарею за время перемещения,

$$q = Q_2 - Q_1 = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2 S\mathscr{E}x}{d\left(d+\varepsilon x\right)}.$$

Отрицательность заряда q означает, что заряд протёк «против» ЭДС батареи, т.е. батарея совершила отрицательную работу:

$$A_{бат} = q\mathscr{E} = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2 S\mathscr{E}^2 x}{d\left(d+\varepsilon x\right)}.$$

Подставим в (1) найденные выражения для $W_1, W_2, A_{бат}$:

$$A - \frac{\varepsilon_0\varepsilon^2 xS\mathscr{E}^2}{d\left(d+\varepsilon x\right)} = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2\mathscr{E}^2 Sx}{2d\left(d+\varepsilon x\right)}.$$

Отсюда

$$x = \frac{d}{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon^2 S\mathscr{E}^2}{2Ad} - \varepsilon}.$$

Задача 6

С какой силой втягивается диэлектрическая пластина в плоский конденсатор с зарядом Q на обкладках, когда она входит в пространство между обкладками на длину x (рис. 4)? Расстояние между обкладками d, длина обкладок l, а ширина a. Диэлектрическая проницаемость пластины ε. Рассмотреть диапазон значений x, при которых $x \gg d$ и $(l-x) \gg d$.

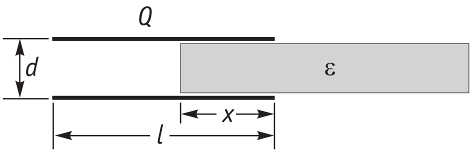

Рис. 4

Решение

Для определения силы, действующей на диэлектрическую пластину со стороны электрического поля конденсатора, воспользуемся методом виртуальных (мысленных) перемещений. Приложим к пластине силу F, равную по величине втягивающей силе и направленную в противоположную сторону. Выдвинув пластину на небольшую величину Δx, мы совершим работу $\Delta A = F \cdot \Delta x$.

По закону сохранения энергии эта работа пойдёт на увеличение энергии конденсатора. Найдём это приращение энергии. Ёмкость конденсатора при вдвинутой на расстояние x пластине

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 (l-x) a}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon x a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a \left[l + (\varepsilon - 1) x \right]}{d}.$$

Энергия конденсатора с зарядом Q равна

$$W = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2 d}{2a\varepsilon_0 \left[l + (\varepsilon - 1) x \right]}.$$

Найдём приращение энергии конденсатора при уменьшении x на Δx:

$$\Delta W = \frac{(\varepsilon - 1) d Q^2 \Delta x}{2a\varepsilon_0 \left[l + (\varepsilon - 1) x \right]^2}.$$

Полученное приращение

$$\Delta W \approx W'(x) \cdot (-\Delta x),$$

где $W'(x)$ – производная по x функции $W = W(x)$.

Приравнивая ΔA к ΔW, получим

$$F = \frac{(\varepsilon - 1) d Q^2}{2a\varepsilon_0 \left[l + (\varepsilon - 1) x \right]^2}.$$

Отметим, что полученное выражение для втягивающей силы справедливо только для $x \gg d$ и $l - x \gg d$. Это связано с тем, что когда левый конец пластины близок к правому или левому концам обкладок, то мы не можем считать ёмкости конденсаторов, у которых длина обкладок мала или сравнима с расстоянием d, как ёмкости плоских конденсаторов, формулу которых мы использовали при расчёте.

М. ТРУХАН