

**Можаяев Виктор Васильевич**

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики Московского
физико-технического института (МФТИ).

Нелинейные элементы в электрических цепях

В статье на конкретных примерах рассмотрены методы расчёта электрических цепей с нелинейными элементами.

Введение

Нелинейными элементами в электрических цепях называют такие элементы, у которых связь между протекающим через них током и напряжением на них не является пропорциональной зависимостью. Для обычного резистора связь между током I и напряжением U имеет вид $I = U/R$, где R – сопротивление резистора, которое есть константа и не зависит от приложенного напряжения. График зависимости $I(U)$ имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Типичным примером нелинейного элемента служит хорошо всем известная лампочка накаливания. При малых напряжениях на лампочке (заметно меньших номинального напряжения), она ведёт себя как обычный резистор, а по мере увеличения напряжения её сопротивление растёт (тепловой нагрев) и зависимость $I(U)$ всё больше и больше отклоняется от начальной линейной зависимости (рис. 1, кривая 1). Это пример естественной нелинейности. Кроме этого, имеется целая группа нелинейных элементов, которые разработаны со специальными вольтамперными характеристиками. Среди таких элементов широко применяемое устройство – полупроводниковый диод. Вольтамперная характеристика диода асимметрична: при одной полярности приложенного в нему напряжения (прямое направление) ток через диод резко нарастает по мере увеличения напряжения, а при обратном направлении (обратная полярность напряжения) ток через диод чрезвычайно мал и почти не зависит от величины приложенного напряжения. Упрощённая характеристика диода (идеальный диод) изображена на рис. 7. Перейдём к разбору конкретных задач.

Задачи

Задача 1. На рис. 1 приведена вольтамперная характеристика лампочки накаливания (кривая 1). При напряжении на лампочке $U_1 = 1,5$ В ток через лампочку $I_1 = 0,2$ А. Во сколько раз надо увеличить напряжение на лампочке, чтобы ток через лампочку увеличился в 2 раза?

Решение. Если бы лампочка являлась обычным резистором (с некоторым постоянным сопротивлением), то согласно закону Ома увеличение тока через неё в 2 раза означало бы, что напряжение на ней также возросло в 2 раза. Но, если мы посмотрим на вольтамперную характеристику лампочки, то увидим, что ток $I_2 = 2I_1 = 0,4$ А про-



текает через лампочку при напряжении на ней $U_2 = 4,5$ В, т. е. напряжение на лампочке надо увеличить не в 2 раза, а в 3 раза ($U_2/U_1 = 3$). С точки зрения обычного резистора можно утверждать, что в данном случае закон Ома не выполняется. Но можно говорить, что закон Ома выполняется, но мы имеем дело с нелинейным элементом, сопротивление которого зависит от тока, протекающего через него. В нашем случае при токе $I_1 = 0,2$ А сопротивление лампочки $R_1 = U_1/I_1 = 7,5$ Ом, а при токе $I_2 = 0,4$ А $R_2 = U_2/I_2 = 11,25$ Ом.

Задача 2. Батарея с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В замкнута на последовательно соединённые резистор с сопротивлением $R = 20$ Ом и лампочку. Вольтамперная характеристика лампочки показана на рис. 1 (кривая 1). Найдите ток через лампочку и напряжение на лампочке. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение. Пусть через лампочку течёт ток I , а напряжение на лампочке U . Запишем закон Ома для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = IR + U.$$

Полученное уравнение является уравнением прямой для переменных I и U . Эту прямую обычно называют нагрузочной прямой. Для наших значений ЭДС батареи и величины сопротивления резистора нагрузочная прямая изображена на рис. 1 линией 2:

при $I = 0$ $U = \mathcal{E} = 4$ В,

а при $U = 0$ ток $I = \mathcal{E}/R = 0,2$ А.

Нагрузочная прямая является характеристикой цепи, в состав которой входит нелинейный элемент, и не зависит от его свойств. Связь между током через нелинейный элемент и напряжением на нём задаётся его вольтамперной характеристикой. Таким образом, установившийся ток в цепи с нелинейным элементом и напряжение на нём должны одновременно принадлежать и вольтамперной характеристике и нагрузочной прямой, т. е. являться их точкой пересечения. В нашем случае это точка С (см. рис.1) с приближёнными координатами $I = 0,15$ А

и $U = 1$ В. Следовательно, ток через лампочку $I = 0,15$ А, а напряжение $U = 1$ В.

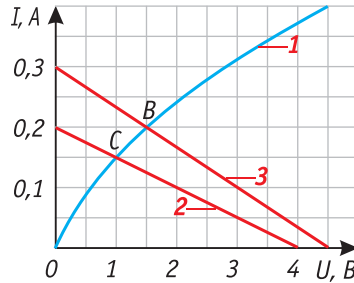


Рис. 1

Задача 3. На рис. 1 приведена вольтамперная характеристика лампочки накаливания (кривая 1). Две такие лампочки L_1 и L_2 включены в схему, изображённую на рис. 2. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 4,5$ В, сопротивление резисторов $R = 15$ Ом. 1) Чему равен ток через каждую лампочку? 2) Что покажет идеальный вольтметр V? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (МФТИ, 2003 г. Автор: В. Можяев).

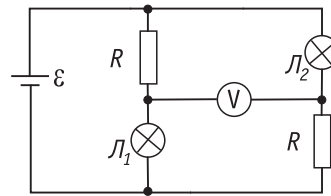


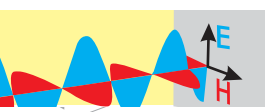
Рис. 2

Решение. Очевидно, что через лампочки будут течь одинаковые токи. Пусть через лампочку L_1 течет ток I_L , а напряжение на лампочке U_L . По второму правилу Кирхгофа для контура, включающего батарею, лампочку L_1 и верхний резистор R ,

$$\mathcal{E} = I_L R + U_L.$$

Для переменных I_L и U_L получено уравнение прямой, называемой нагрузочной прямой. Для наших значений ЭДС батареи и величины сопротивления резистора эта прямая изображена на рис. 1 линией 3:

при $I_L = 0$ $U_L = \mathcal{E} = 4,5$ В,



а при $U_{л} = 0$ ток $I_{л} = \mathcal{E} / R = 0,3$ А.

Ток через лампочку (нелинейный элемент) и напряжение на ней должны одновременно принадлежать и вольтамперной характеристике и нагрузочной прямой, т. е. являться их точкой пересечения. В нашем случае это точка В (см. рис. 1) с координатами: $I_{лВ} = 0,2$ А и $U_{лВ} = 1,5$ В. Легко убедиться, что это состояние будет устойчивым: например, при небольшом случайном увеличении тока в цепи напряжение на лампочке должно уменьшиться согласно нагрузочной прямой, а уменьшение напряжения на лампочке должно привести к уменьшению тока через лампочку в соответствии с её вольтамперной характеристикой, т. е. ток будет возвращаться к своему исходному состоянию.

Итак, получили, что ток через лампочки будет равен $I_{лВ} = 0,2$ А, а напряжение на лампочках $U_{лВ} = 1,5$ В. Напряжения на резисторах

$$U_{RB} = \mathcal{E} - U_{лВ} = 3 \text{ В}.$$

Показание вольтметра

$$U_V = U_{RB} - U_{лВ} = 1,5 \text{ В}.$$

Задача 4. На рис. 3 изображена идеализированная вольтамперная характеристика диода. Постройте вольтамперную характеристику нелинейного элемента, состоящего из диода и последовательно соединённого с ним резистора с сопротивлением $R = 50$ Ом. (Автор: В. Можяев)

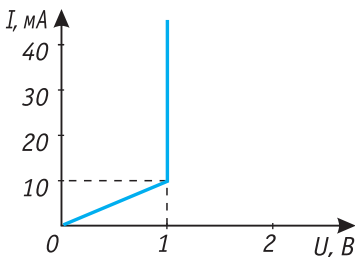


Рис. 3

Решение. Запишем связь между напряжением (в вольтах) на резисторе с сопротивлением $R = 50$ Ом и током (в амперах), протекающим через него:

$$U_R = 50 I.$$

Эта связь является линейной зависимостью и на рис. 4 изображена прямой 2. При последовательном соединении двух элементов через них течёт общий ток, а напряжение на них равно сумме напряжений на каждом из них. Поэтому, чтобы получить вольтамперную характеристику диода с последовательно соединённым резистором, нужно при каждом фиксированном токе сложить их напряжения.

Рассмотрим сначала диапазон значений тока $0 \leq I \leq 10$ мА. На этом участке диод ведёт себя как резистор с сопротивлением $R = 100$ Ом, поэтому зависимость напряжения U_D на диоде от тока имеет вид:

$$U_D = 100 I.$$

Складывая U_R и U_D получим зависимость общего напряжения U от тока I :

$$U = 150 I.$$

Рассмотрим теперь участок $I \geq 10$ мА. При этих значениях тока напряжение на диоде

$$U_D = 1,$$

если напряжение выражено в вольтах. Складывая U_R и U_D получим

$$U = 1 + 50 I.$$

Это есть уравнение прямой, которая параллельна прямой $U_R = 50 I$. Вольтамперная характеристика диода с последовательно соединённым резистором ($R = 50$ Ом) изображена на рис. 4 ломаной 3.

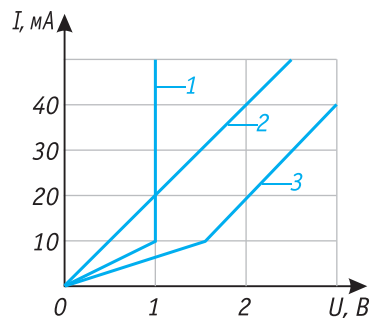


Рис. 4

Задача 5. На рис. 5 кривая 1 соответствует вольтамперной характеристике дугового разряда с последовательно соединённым с ним балластным резистором с сопротивлением $R_B = 1,6$ Ом. Постройте вольтампер-



ную характеристику дугового разряда без балластного сопротивления. (Автор: В. Можяев)

Решение. Поскольку имеем вольтамперную характеристику двух последовательно соединённых элементов, то при каждом фиксированном токе общее напряжение на них равно сумме напряжений на каждом из них. Построим вольтамперную характеристику балластного резистора:

$$U_B = I \cdot R_B.$$

Это будет прямая 2 на рис. 5. Если теперь при каждом фиксированном токе из напряжений для кривой 1 вычесть значения напряжений прямой 2, то получим значения напряжений для дугового разряда без R_B . Вольтамперная характеристика для дугового разряда без балластного сопротивления изображена кривой 3 на рис. 5.

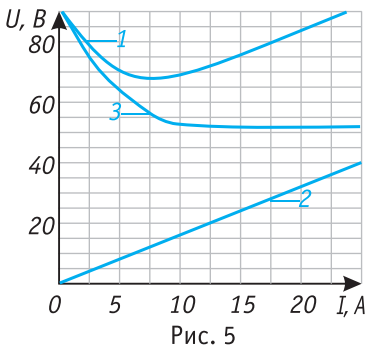


Рис. 5

Задача 6. В схеме, изображённой на рис. 6, катушки с индуктивностями L_1 и L_2 замкнуты через идеальный диод D . В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор ёмкостью C заряжен до напряжения U_0 . Через некоторое время после замыкания ключа напряжение на конденсаторе станет равным нулю. 1) Найдите токи через катушки в этот момент времени. Затем конденсатор начнёт перезаряжаться и зарядится до некоторого максимального напряжения. 2) Чему будет равно это напряжение? (Автор: В. Можяев)

Решение. В схеме на рис. 6 используется нелинейный элемент – идеальный диод. Вольтамперная характеристика такого диода изображена на рис. 7. При нулевом на-

пряжении на диоде он открыт, его сопротивление равно нулю, а величина тока через него зависит от внешней цепи. При отрицательных напряжениях на диоде диод закрыт, его сопротивление бесконечно большое и ток через диод равен нулю. С такой характеристикой диод выполняет роль ключа: пропускает ток в одну сторону, а в другую не пропускает.

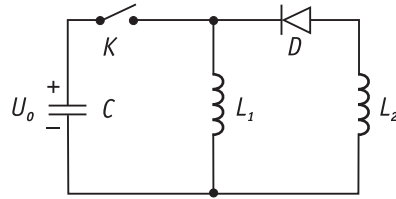


Рис. 6

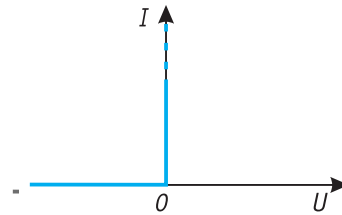


Рис. 7

После замыкания ключа K конденсатор начнёт разряжаться через катушку L_1 , диод будет закрыт (поскольку на нём отрицательное напряжение) и ток через катушку L_2 будет равен нулю. Это будет продолжаться до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не станет равным нулю. В этот момент ток через катушку L_1 достигнет максимального значения и его можно найти по закону сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_{1m}^2}{2}.$$

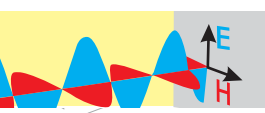
Отсюда

$$I_{1m} = U_0 \sqrt{C/L_1}.$$

Напряжение на диоде в этот момент равно нулю и ток через него также равен нулю:

$$I_{2m} = 0.$$

С этого момента диод открыт, ток через катушку L_1 начнёт уменьшаться, частично на-



правляясь в катушку L_2 , а частично к конденсатору. На рис. 8 показан произвольный момент во время перезарядки конденсатора. По второму правилу Кирхгофа для контура, охватывающего катушки L_1 и L_2 :

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Это уравнение в интегральном виде:

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = const.$$

Константу найдём из начальных условий. Когда напряжение на конденсаторе равно нулю, токи в катушках $I_{1m} = U_0 \sqrt{C/L}$ и $I_{2m} = 0$. После подстановки начальных значений токов получим:

$$I_1 L_1 + I_2 L_2 = U_0 \sqrt{L_1 C}. \quad (1)$$

В тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигнет максимального значения, ток I_C станет равным нулю, а токи через катушки будут равны. Обозначим этот ток через I_{12} . Из уравнения (1) найдём:

$$I_{12} = \frac{U_0}{L_1 + L_2} \sqrt{L_1 C}. \quad (2)$$

Теперь максимальное напряжение U_m на конденсаторе можно найти по закону сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} + \frac{(L_1 + L_2)I_{12}^2}{2}.$$

После подстановки в это уравнение выражения (2) для I_{12} получим:

$$U_m = U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}.$$

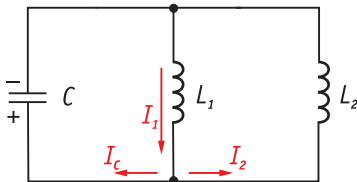


Рис. 8

Задача 7. В схеме, изображённой на рис. 9, при разомкнутом ключе K конденсатор ёмкостью $C = 20$ мкФ заряжен до напряжения

$U_0 = 12$ В. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 5$ В, внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Индуктивность катушки $L = 2$ Гн, D – идеальный диод. 1) Чему равен максимальный ток в цепи после замыкания ключа? 2) Какое напряжение установится на конденсаторе? (МФТИ, 1999 г. Автор: В. Можжев)

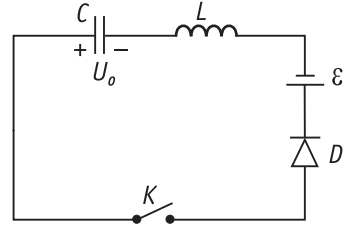


Рис. 9

Решение. Пусть через некоторое время после замыкания ключа в цепи течёт ток I против часовой стрелки, а на конденсаторе напряжение U_C . Закон Ома в этот момент имеет вид:

$$L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = U_C. \quad (1)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{dU_C}{dt} = 0. \quad (2)$$

Поскольку конденсатор разряжается, то

$$I = -C \frac{dU_C}{dt}.$$

После подстановки этого соотношения в (2) получим уравнение относительно тока I :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0.$$

Это уравнение описывает гармоническое колебание тока с циклической частотой

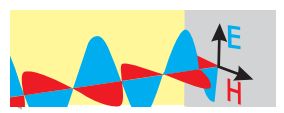
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$I(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t,$$

где A и B – константы, которые определяются из начальных условий. При $t = 0$

$I = 0$, а $\frac{dI}{dt} = \frac{U_0 - \mathcal{E}}{L}$. Второе начальное



условие найдено из уравнения (1). Из первого начального условия следует, что константа $B = 0$. Из второго условия получаем, что

$$A\omega_0 = \frac{U_0 - \mathcal{E}}{L}.$$

Исходя из полученных значений констант зависимость тока от времени имеет вид:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{(U_0 - \mathcal{E})}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \\ &= (U_0 - \mathcal{E}) \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе данной зависимости $I(t)$ мы нигде не использовали наличие диода в цепи. Присутствие диода сказывается на том, что полученная зависимость будет иметь место только для $I(t) > 0$, т. е. в течение времени $0 \leq t \leq \pi/\omega_0$, а при $t > \pi/\omega_0$

$I(t) = 0$. Очевидно, что максимальное значение тока равно амплитуде тока в уравнении (4):

$$I_{max} = (U_0 - \mathcal{E}) \sqrt{\frac{C}{L}} = 22 \text{ мА}.$$

Для ответа на второй вопрос найдём зависимость $U_C(t)$. Из уравнения (1) можно записать

$$U_C(t) = \mathcal{E} + L \frac{dI}{dt}. \quad (5)$$

Из уравнения (4) найдём производную $\frac{dI}{dt}$:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{(U_0 - \mathcal{E})}{L} \cos \omega_0 t.$$

Подставляя это соотношение в (5), получим

$$U_C(t) = \mathcal{E} + (U_0 - \mathcal{E}) \cos \omega_0 t.$$

При $t = \pi/\omega_0$ ток в цепи станет равным нулю, а напряжение на конденсаторе

$$U_C\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 2\mathcal{E} - U_0 = -2 \text{ В}.$$

Знак минус означает, что конденсатор перезарядится: на верхней пластине будет плюс, а на нижней – минус.

Задача 8. В схеме, изображённой на рис. 10, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор ёмкостью $C = 100$ мкФ не заряжен. Вольтамперная характеристика диода D изображена на рис. 11. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_n = 1$ В, сопротивление резистора $R = 1$ кОм. 1) Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2) Какой заряд протечёт через диод после замыкания ключа? 3) Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (МФТИ, 2000 г. Автор: В. Можаяев)

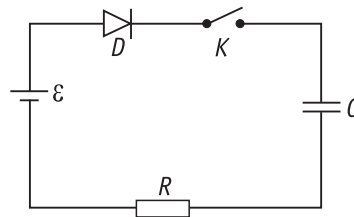


Рис. 10

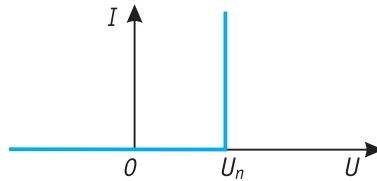


Рис. 11

Решение. В данной задаче мы имеем дело не с идеальным диодом, вольтамперная характеристика которого изображена на рис. 7, а с диодом, характеристика которого более приближена к реальной характеристике диода. Пороговое напряжение на диоде возникает из-за объёмного распределения заряда внутри диода. Поскольку ЭДС батареи $\mathcal{E} > U_n$, то после замыкания ключа в цепи потечёт ток. Пусть начальный ток равен I_0 , тогда по закону Ома для замкнутого контура можно записать

$$\mathcal{E} = U_n + I_0 R.$$

Отсюда



$$I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_n}{R} \mathcal{E} = 5 \text{ мА}.$$

После замыкания ключа происходит зарядка конденсатора: напряжение на конденсаторе растёт, а ток в цепи уменьшается и при некотором напряжении на конденсаторе U_C ток прекратится. По закону Ома для этого момента

$$\mathcal{E} = U_n + U_C.$$

Отсюда

$$U_C = \mathcal{E} - U_n = 5 \text{ В}.$$

Следовательно, заряд, протёкший через диод,

$$q = CU_C = C(\mathcal{E} - U_n) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

По закону сохранения энергии работа, совершённая батареей по перемещению по цепи заряда q , пошла на работу по преодолению порогового напряжения и на увеличение энергии конденсатора, а оставшаяся часть выделилась в виде тепла Q на резисторе:

$$q\mathcal{E} = qU_n + \frac{CU_C^2}{2} + Q.$$

Отсюда

$$Q = q(\mathcal{E} - U_n) - \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C(\mathcal{E} - U_n)^2}{2} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Задача 9. На рис. 12 показана вольтамперная характеристика (ВАХ) последовательно соединённых неоновой лампочки и некоторого балластного резистора R_B . Если лампочка изначально не горит и на неё вместе с балластным сопротивлением подавать напряжение, то при напряжениях от нуля до некоторого напряжения зажигания она не горит (ток в цепи равен нулю), а при напряжении зажигания (в нашем случае $U_3 = 80 \text{ В}$) она загорается (точка A). При дальнейшем увеличении напряжения ток линейно растёт (участок AB). При уменьшении напряжения (участок BAC) старая вольтамперная характеристика сохраняется только до точки A , а при напряжениях меньших напряжения зажигания лампочка продолжает гореть (участок AC) и гаснет при некотором напряжении гашения (в на-

шем случае напряжение гашения $U_f = 60 \text{ В}$). Такая лампочка вместе с балластным резистором включена в схему, изображённую на рис. 13. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 120 \text{ В}$. При каких значениях сопротивления R лампочка будет стационарно гореть после замыкания ключа K ? Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. (Автор: В. Можаяев)

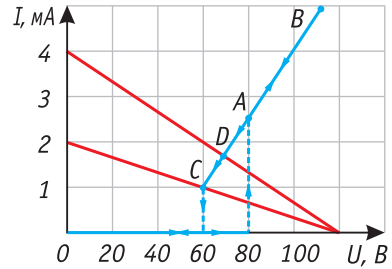


Рис. 12

Решение. После замыкания ключа конденсатор начнёт заряжаться, когда напряжение на конденсаторе достигнет напряжения зажигания, лампочка загорится, через неё потечёт ток. На вольтамперной характеристике это соответствует точке A . Дальнейшее поведение тока через лампочку будет зависеть от величины сопротивления резистора. Пусть в лампочке установится стационарный режим: ток, протекающий через неё, равен I , а напряжение на ней (вместе с балластным сопротивлением) равно U . По закону Ома:

$$\mathcal{E} = IR + U.$$

Это знакомое нам уравнение нагрузочной прямой в координатах I и U . Если лампочка горит стационарно, то ток через неё и напряжение на ней должны, с одной стороны, принадлежать вольтамперной характеристике, а с другой стороны, соответствовать нагрузочной прямой, а это может быть только в том случае, если графики ВАХ и нагрузочной прямой пересекаются. На рис. 12 в качестве примера приведена нагрузочная прямая для $R = 30 \text{ кОм}$. Точка D пересечения соответствует устойчивому горению лампочки: ток через лампочку $I = 1,7 \text{ мА}$, а $U = 70 \text{ В}$. Проведём теперь



нагрузочную прямую, проходящую через точку C . Очевидно, что эта нагрузочная прямая является предельной, когда лампочка ещё горит. Она соответствует сопротивлению $R = 60 \text{ кОм}$. Следовательно, при сопротивлениях $R < 60 \text{ кОм}$ лампочка будет стационарно гореть.

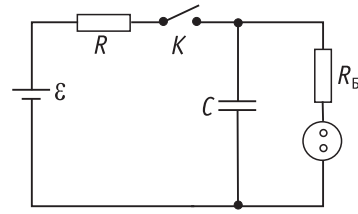


Рис. 13

Упражнения

1. Вольтамперная характеристика диода для положительных напряжений изображена на рис. 14. Два таких диода D_1 и D_2 включены в схему, представленную на рис. 15. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 1,5 \text{ В}$, сопротивление резистора $R = 500 \text{ Ом}$. 1) Чему равно напряжение на диоде D_1 ? 2) Что покажет амперметр A ? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением амперметра пренебречь. (МФТИ, 2003 г. Автор: В. Можаяев)

Ответ. 1) $U_{D1} = 0,75 \text{ В}$. 2) $I_A = 6 \text{ мА}$.

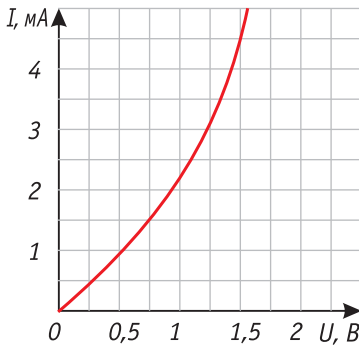


Рис. 14

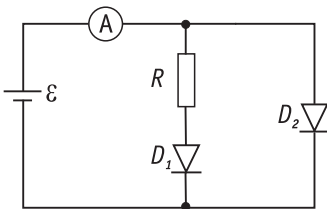


Рис. 15

2. В схеме, изображённой на рис. 16, при разомкнутом ключе K конденсатор ёмкостью $C = 10 \text{ мкФ}$ заряжен до напряжения $U = 10 \text{ В}$. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 15 \text{ В}$, индуктивность катушки $L = 0,1 \text{ Гн}$, D — идеальный диод. 1) Чему равен максимальный ток в цепи

после замыкания ключа? 2) Чему будет равно установившееся напряжение на конденсаторе? (МФТИ, 1999 г. Автор: В. Можаяев)

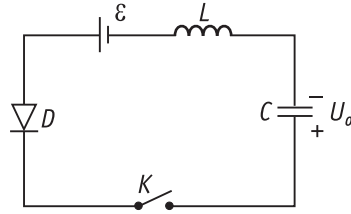


Рис. 16

Ответ. 1) $I_{max} = \sqrt{C/L} (\mathcal{E} - U_0) = 0,05 \text{ А}$.

2) $U_C = 2\mathcal{E} - U_0 = 20 \text{ В}$.

3. Вольтамперная характеристика диода показана на рис. 3. Такой диод включён в схему, изображённую на рис. 17. В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор ёмкостью $C = 100 \text{ мкФ}$ заряжен до напряжения $U_0 = 5 \text{ В}$, сопротивление резистора $R = 100 \text{ Ом}$. Ключ замыкают. 1) Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2) Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи будет равен $I = 10 \text{ мА}$? 3) Какое количество теплоты выделится в цепи после замыкания ключа? (МФТИ, 2000 г. Автор: В. Можаяев)

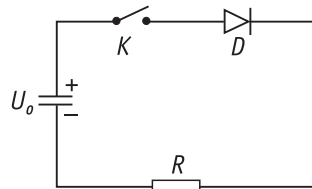


Рис. 17

Ответ. 1) $I_0 = 40 \text{ мА}$. 2) $U_C = 2 \text{ В}$.

3) $Q = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$.