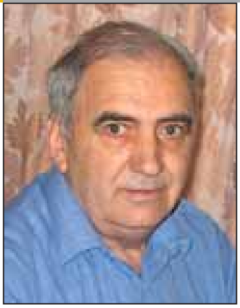

Можаев Виктор Васильевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ), член редколлегии журнала «Квант».

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В статье на примерах решения задач показаны методы нахождения распределения зарядов на проводниках, помещенных в электростатическое поле других зарядов.

Зная распределение зарядов, можно отвечать и на последующие вопросы. При решении задач применяются принцип суперпозиции полей, закон сохранения заряда, понятия емкости, закон сохранения энергии.

ВВЕДЕНИЕ

Проводниками называют вещества, которые хорошо проводят электрический ток. Количественной физической величиной, характеризующей способность проводить ток, является электропроводность или обратная ей величина ρ, называемая удельным сопротивлением. К хорошим проводникам обычно относят вещества с $\rho < 10^{-8}$ Ом$\cdot$м.

К проводникам относятся металлы, электролиты и плазма. В металлах носителями тока являются «свободные» (не принадлежащие конкретному атому вещества) электроны проводимости, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в плазме- ионы и свободные электроны.

Мы будем рассматривать электростатические поля. Если в такое поле поместить проводник произвольной формы, то моментально произойдет перераспределение свободных зарядов. На поверхности проводника возникает так называемый поверхностный заряд, распределение которого по поверхности проводника зависит от распределения внешнего электрического поля и от конфигурации проводника. Чрезвычайно важно, что распределение поверхностного заряда всегда будет таким, что суммарное электрическое поле (внешнее поле плюс поле, создаваемое поверхностными зарядами) внутри проводника окажется равным нулю ($\vec{E} = 0$). Электрическое поле вне проводника есть суперпозиция внешнего поля (до внесения проводника) и поля поверхностных зарядов. На рис. 1 в качестве приме-

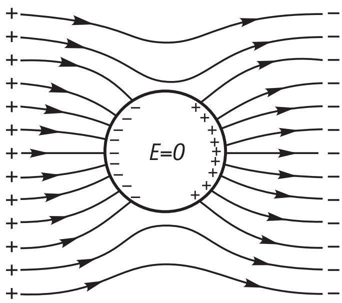

Рис. 1.

ра показано электрическое поле вблизи проводящего незаряженного шара, помещенного во внешнее однородное поле. Поскольку поле внутри проводника равно нулю, то все точки проводника (в том числе и его поверхность) имеют одинаковый потенциал. А это означает, что силовые линии электрического поля у поверхности проводника с внешней стороны будут перпендикулярны поверхности проводника. Все это относится и к заряженному проводнику без внешнего поля или во внешнем поле. Во всех трех случаях мы имеем такое распределение поверхностного заряда, которое совместно с внешним полем или без него делает поле нулевым в любой точке проводника. Суммарный поверхностный заряд равен заряду проводника, а если на проводнике нет заряда, то равен нулю. Напряженность электрического поля E вблизи поверхности проводника (с внешней стороны) перпендикулярна поверхности проводника и связана с поверхностной плотностью заряда в данной точке поверхности соотношением $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Перейдем к разбору задач.

Задача 1. В однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E_0}$ помещают тонкую, незаряженную проводящую пластину так, что плоскость пластины перпендикулярна $\vec{E_0}$.1) Пренебрегая краевыми эффектами, определите поверхностную плотность индуцированных зарядов. 2) Нарисуйте распределение поля после внесения пластины вдоль оси, перпендикулярной пластине (начало отсчета выберите в центре пластины).

Решение. Тонкая пластина означает, что ее длина и ширина много больше ее толщины. В этом случае разумно положить, что поверхностные плотности индуцированных зарядов на боковых поверхностях пластины (после установки ее в поле) будут постоянны, равны по величине и противоположны по знаку. Пусть, как это изображено на рис. 2, на левой боковой поверхности появится

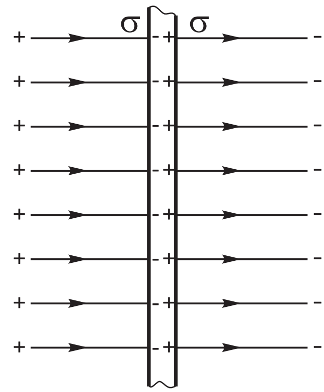

Рис. 2.

отрицательный заряд, а на правой – положительный с поверхностной плотностью σ . Величина σ может быть найдена из основного свойства проводника: поле внутри пластины должно быть равно нулю. Напряженность электрического поля внутри пластины $\vec{E_n}$ является суперпозицией (суммой) внешнего поля $\vec{E_0}$ и поля, создаваемого поверхностными зарядами:

$$E_n = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0.$$

Отсюда $\sigma = \varepsilon_0 E_0$.

Очевидно, что поле, создаваемое индуцированными зарядами, вне пластины равно нулю. Поэтому результирующее поле вне пла-

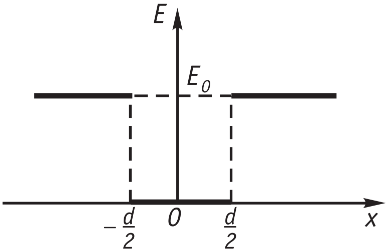

Рис. 3.

стины останется неизменным и равным E_0. Распределение поля после внесения пластины показано на рис. 3 (d-толщина пластины). Как видно из рисунка, у поверхностей пластины $(x=\pm d/2)$ напряженность поля испытывает скачок, равный $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Это физическое свойство электрического поля не является характерным для проводника в виде пластины, а имеет место для проводника любой формы.

Задача 2. В центре полого проводящего шара расположен точечный положительный заряд q. Радиус внутренней поверхности шара – R_1, внешней – R_2, заряд шара положителен и равен Q. 1) Найдите распределение поля $E(r)$ во всем пространстве, где r – расстояние от центра шара. Постройте график $E(r)$. 2) Определите поверхностную плотность зарядов на полом шаре.

Решение. Под действием поля точечного заряда q заряд шара Q перераспределится и будет расположен на поверхностях шара. В силу сферической симметрии это распределение будет равномерным (рис. 4). Пусть на внутренней поверхности полого шара по-

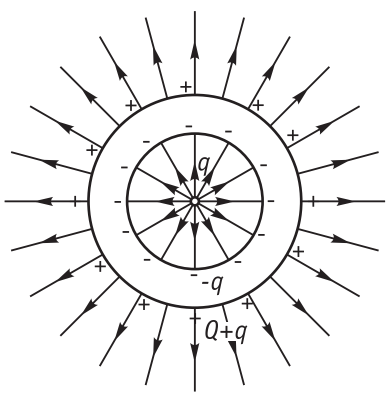

Рис. 4.

верхностная плотность заряда σ_1, а на внешней σ_2. Из условия сохранения заряда можно записать:

$$4\pi R_1^2\cdot\sigma_1+4\pi R_2^2\cdot\sigma_2=Q.$$

Перейдем к вопросу о распределении поля, которое мы можем найти, даже не зная σ_1 и σ_2. В области $0<r<R_1$ напряженность поля $E(r)$ определяется только точечным зарядом q:

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Внутри проводника, т. е. при $R_1<r<R_2$ напряженность поля $E(r)=0$

И, наконец, в области $r>R_2$ поле эквивалентно полю точечного заряда величиной $q+Q$, расположенного в центре шара:

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r^2}$$

Распределение поля $E(r)$ показано на рис. 5.

Найти поверхностные плотности заряда σ_1 и σ_2 можно двумя способами. В первом способе сначала найдем суммарный заряд

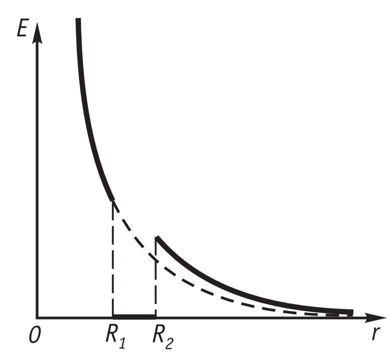

Рис. 5.

q_1 на внутренней поверхности шара. Поле внутри шара (в проводнике) является суммой полей, создаваемых зарядами q_1 и q. Но это поле равно нулю, следовательно, $q_1=-q$, а поверхностная плотность заряда

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} = -\frac{q}{4\pi R_1^2}$$

Поскольку суммарный заряд на шаре равен Q, то заряд на внешней поверхности шара $q_2 = Q - q_1 = Q + q$, а поверхностная плотность заряда.

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{Q+q}{4\pi R_2^2}.$$

Во втором способе мы используем граничное условие у поверхности проводника: напряженность поля E у поверхности проводника (снаружи) связана с поверхностной плотностью заряда σ соотношением: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Применительно к внутренний поверхности нашего шара радиусом R_1: величина напряженности поля у поверхности $E(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$, следовательно плотность заряда: $\sigma_1 = \varepsilon_0 E(R_1) = \frac{q}{4\pi R_1^2}$.

Это абсолютная величина, а знак заряда будет отрицательным. У внешней поверхности сферы напряженность поля $E(R_2) = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$, поэтому

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 E(R_2) = \frac{Q+q}{4\pi R_2^2}.$$

Задача 3. Между пластинами плоского воздушного конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между пластинами d поддерживается постоянная разность потенциалов U. Как изменится сила электростатического взаимодействия между пластинами, если в конденсатор вставить параллельно обкладкам проводящую незаряженную пластину толщиной h $(h<d)$, размеры проводящей пластины равны размерам пластин конденсатора.

Решение. В случае пустого конденсатора его емкость $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, а заряд на обкладках

$$Q_0 = C_0 U = \frac{\varepsilon_0 SU}{d}.$$

Напряженность электрического поля, созданного зарядами одной пластины

$$E_0 = \frac{Q_0}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2d}.$$

Сила взаимодействия между пластинами

$$F_0 = E_0 \cdot Q_0 = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}.$$

После введения проводящей пластины толщиной h емкость конденсатора изменится и будет равна $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h}$.

Заметим, что емкость конденсатора с проводя-щей пластиной не зависит от расстояния между пластиной и одной из обкладок конденсатора и может быть найдена как емкость двух последова-тельно соединенных конденсаторов. (Примеча-ние редакции).

Новый заряд на конденсаторе

$$Q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 SU}{d-h}$$

Поле, создаваемое зарядами одной обкладки,

$$E_1 = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2(d-h)}.$$

Сила взаимодействия между пластинами

$$F_1 = E_1 Q_1 = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2(d-h)^2}.$$

Отношение

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{d^2}{(d-h)^2} = \frac{1}{(1-h/d)^2}.$$

Сила притяжения между обкладками конденсатора увеличится в $\left(\frac{d}{d-h}\right)^2$ раз.

Задача 4. По сфере радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определить давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

Решение. Решение данной задачи проведем двумя способами: в первом случае найдем непосредственно силу, действующую на заряд единицы поверхности сферы, а во втором случае воспользуемся энергетическим методом.

Напряженность электрического поля вблизи поверхности сферы (с внешней стороны) равна напряженности поля точечного заряда величиной Q, расположенного в центре сферы:

$E_{внеш} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, а с внутренней стороны

$$E_{внутр} = 0.$$

Таким образом, возникает законный вопрос: какое же поле действует на заряд единицы поверхности сферы? Поля $E_{внутр}$ и $E_{внешн}$ создаются всеми зарядами сферы, а нам нужно знать поле, которое создают все заряды сферы, кроме зарядов самой единицы поверхности. На рис. 6 элемент единицы поверхности сферы нарисован отдельно от сферы, он мысленно удален вместе с заря-

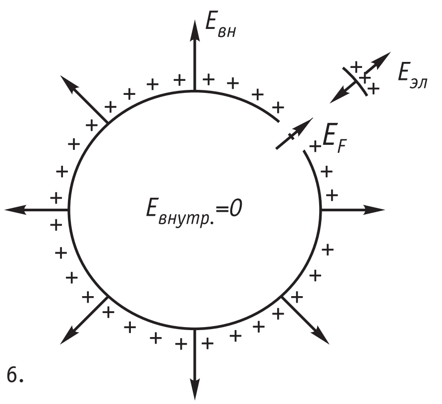

Рис. 6.

дом, распределение оставшегося заряда сохранено. Напряжённость поля, создаваемого оставшимися зарядами, обозначено, через E_F, а напряженность поля, создаваемого зарядом выделенного элемента, через $E_{эл}$. Согласно принципу суперпозиции электростатических полей можно записать:

$$E_F - E_{эл} = E_{внутр} = 0;$$

$$E_F + E_{эл} = E_{внеш} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$E_F = \frac{E_{внутр} + E_{внеш}}{2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Теперь мы можем найти силу, действующую на заряд выделенного элемента поверхности сферы. Поскольку этот заряд равен

$\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$, то сила на единицу поверхности сферы (давление) $P = \sigma E_F = \dfrac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}$.

Теперь рассмотрим второй способ решения данной задачи. Проведем медленное виртуальное (мысленное) всестороннее сжатие нашей заряженной сферы, уменьшив радиус сферы на малую величину $\Delta R (\Delta R > 0)$. Изменение объема сферы будет равно $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$.

При медленном сжатии внешнее давление равно давлению изнутри. Обозначим это давление через P, тогда работа, совершенная внешними силами

$$\Delta A = P\Delta V = P \cdot 4\pi R^2 \Delta R.$$

Эта работа пойдет на увеличение энергии электрического поля зарядов сферы. Энергия поля заряженной сферы до сжатия

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

где C-емкость сферы радиусом R. Увеличение энергии электрического поля после сжатия

$$\Delta W = \frac{Q^2 \Delta R}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Приравнивая ΔA и ΔW, получим

$$P = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4}.$$

Задача 5. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин S=100 см^2 и расстоянием между пластинами d=5мм заряжен от батареи с ЭДС $\mathscr{E}$ =100В и отключен. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вставить в область между пластинами конденсатора металлическую пластину толщиной h=2мм? Размеры всех пластин равны.

Решение. Минимальную работу найдем по закону сохранения энергии.

Энергия конденсатора емкостью C_1 до введения пластины

$$W_1 = \frac{C_1 \mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S \mathscr{E}^2}{2d}.$$

После введения пластины заряд на конденсаторе сохраняется:

$$Q = C_1\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathscr{E}\,.$$

Новая емкость конденсатора $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-h}$.

Энергия конденсатора после введения пластины

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2(d-h)}{2d^2}.$$

Работа $A = W_2 - W_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{2d}\left(\dfrac{d-h}{d}-1\right) =$

$$= -\frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 h}{2d^2} = -3{,}54\cdot 10^{-8}\text{ Дж.}$$

Задача 6. В плоском воздушном конденсаторе параллельно его пластинам расположена заряженная металлическая пластина с зарядом q так, что величина верхнего воздушного зазора равна ℓ_1, а нижнего - ℓ_2 (рис. 7). Площади всех пластин одинаковы и равны S. Чему будет равен заряд на обкладках конденсатора, если такой конденсатор подключить к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$?

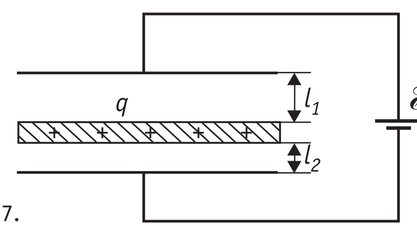

Рис. 7.

Решение. Пусть на верхней обкладке конденсатора появится заряд Q, а на нижней $-Q$. Напряженность поля в верхнем зазоре

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Напряженность поля внутри металлической пластины равна нулю. Напряжённость поля в нижнем зазоре

$$E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между обкладками

$$V = E_1\ell_1 + E_2\ell_2 = \frac{Q(\ell_1+\ell_2)}{\varepsilon_0 S} + \frac{q(\ell_2-\ell_1)}{2\varepsilon_0 S}.$$

Но $V = \mathscr{E}$, поэтому

$$\mathscr{E} = \frac{Q(\ell_1+\ell_2)}{\varepsilon_0 S} + \frac{q(\ell_2-\ell_1)}{2\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}}{\ell_1+\ell_2} - \frac{q(\ell_2-\ell_1)}{2(\ell_1+\ell_2)}.$$

Задача 7. Между двумя проводящими заряженными сферами с радиусами R_1 и R_2 и зарядами Q_1 и Q_2 на расстоянии ℓ от центра сфер расположен точечный заряд q (рис. 8). Какой заряд протечет через гальванометр G после заземления внутренней сферы (после замыкания ключа K)?

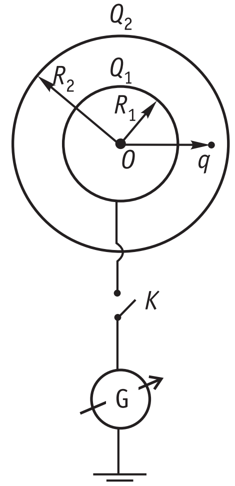

Рис. 8.

Решение. До замыкания ключа на внутренней сфере находился заряд Q_1. При наличии заряда q этот заряд будет распределен неравномерно по поверхности сферы в отличие от случая, когда заряда q нет.

Результирующее поле от всех зарядов внутри сферы радиуса R_1 равно нулю. После замыкания ключа K потенциалы внутренней сферы и Земли сравниваются. Если бы не было заряда q, а заряд Q_2 равнялся нулю, то очевидно, что весь заряд Q_1 ушел бы со сферы на Землю и протекший заряд через гальванометр был бы равен Q_1. Но у нас есть заряд q и $Q_2 \neq 0$. Следовательно, наша сфера (радиуса R_1) находится в поле этих зарядов. На заземленной сфере обязательно появится какой-то заряд. Обозначим этот заряд через Q_x. Величину Q_x можно найти из условия, что потенциал заземленной сферы в поле трех зарядов (Q_2, q и Q_x) равен нулю. Поскольку результирующая напряженность поля внутри заземленной сферы равна нулю, то потенциал этой сферы от заряда Q_x на сфере:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\sum q_j$$

где q_j – заряд на небольшой части поверхности сферы. Поскольку суммарный заряд сферы равен Q_x то $\sum q_j = Q_x$ и

$$\varphi_1 = \frac{Q_x}{4\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Потенциал в центре сферы от заряда q

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}.$$

Очевидно, что потенциал в центре сферы от заряда Q_2

$$\varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Запишем условия равенства нулю суммарного потенциала $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

После подстановки выражений для φ_1, φ_2 и φ_3, получим $\frac{Q_x}{R_1} + \frac{q}{\ell} + \frac{Q_2}{R_2} = 0$.

Отсюда $Q_x = -R_1\left(\frac{q}{\ell} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$.

Протекший с Земли заряд Q через гальванометр $Q = Q_x - Q_1 = -(Q_1 + \frac{R_1}{\ell}q + \frac{R_1}{R_2}Q_2)$

Знак минус означает, что ток будет течь со сферы на Землю.

Задача 8 Плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между пластинами d подсоединен к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$. У левой обкладки конденсатора (рис. 9) вплотную к ней расположена проводящая пластина массой M и толщиной h. Между пластиной и обкладкой хороший электрический контакт. Сначала пластину удерживают, а затем отпускают и она начинает перемещаться к правой обкладке. Пренебрегая силой тяжести пластины, определите её скорость в момент соударения с правой обкладкой. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

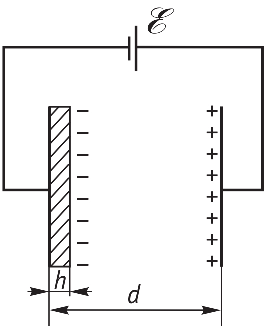

Рис. 9.

Решение. В исходном положении пластины на ней будет находиться отрицательный заряд Q и он останется на ней после отрыва. Найдем величину этого заряда. Начальная емкость конденсатора.

$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h}$, а заряд на нем

$$Q = C_0\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}}{d-h} \qquad (1)$$

Теперь рассмотрим произвольный момент времени, когда пластина находится на расстоянии x от левой обкладки конденсатора (рис. 10) Пусть в этот момент на левой обклад-

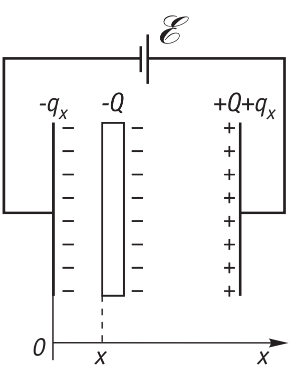

Рис. 10.

ке находится отрицательный заряд – $q_x (q_x > 0)$, тогда (из условия сохранения заряда) на правой стороне будет положительный заряд $Q + q_x$. Величину заряда q_x найдем из условия, что между обкладками конденсатора поддерживается постоянная разность потенциалов, равная $\mathscr{E}$. Напряженность электрического поля слева от пластины складывается из напряженностей полей, создаваемых зарядами обеих обкладок и пластины: