Вступительное слово министра образования Республики Саха (Якутия) Габышевой Феодосии Васильевны

Габышева Ф. В. и директор физико-математического форума «Ленский край» Ноев Афанасий Иванович

Международная олимпиада школьников «Туймаада-2006» по физике

С 7 по 15 июля на базе физико-математического форума «Ленский край» прошла очередная 13-ая международная физическая олимпиада «Туймаада».

На олимпиаде собрались участники из Румынии, Казахстана, Армении и России. Россию представляли: Березники, Владивосток, Дубна, Иркутск, Республика Мордовия, Москва, Санкт-Петербург, Саратов, Саров, Сергиев Посад, Якутск.

В этом году были определённые особенности в комплектации задач по фи-

Одна из самых многочисленных делегаций (Саров и Республика Мордовия). Руководитель — заслуженный учитель Республики Мордовия, декан факультета довузовской подготовки, заведующий кафедрой общей физики СарФТИ, к.п.н, доцент Подлесный Дмитрий Владимирович (в центре последнего ряда) — был отмечен на олимпиаде благодарственным письмом от администрации президента России зике. Во-первых, в составлении задач участвовали представители стран дальнего зарубежья. Во-вторых, поскольку основные проблемы у российской сборной обычно бывают с экспериментом, то на этой «Туймааде» был сделан уклон на эксперимент, в частности, в высшей лиге были даны две экспериментальные задачи, использующие довольно сложное и дорогостоящее оборудование. В первой задаче было необходимо исследовать волновые свойства света, пронаблюдать и объяснить дифракции Фраунгофера, Юнга, Френеля, а также поработать с дифракционными решётками, имеющими различные периоды. Во второй задаче требовалось с помощью генератора переменного тока звуковых частот и пары цифровых мультиметров определить неизвестную схему внутри «чёрного ящика».

Уже стало традицией приглашение сборной России на олимпиаду «Туймаада». В этом году руководил делегацией преподаватель МФТИ Гуденко Алексей Викторович. Все три представителя сборной показали достойные результаты, завоевав золотую 1, серебряную 2 и бронзовую 3 медали.

Медаль	Участник	Территория
	Победители высшей лиги	
1	Федянин Дмитрий	Саратов
2	Марковцев Вадим	Сергиев Посад
2	Popa Crystina Georgeta	Romania
3	Афанасьев Александр	Владивосток
3	Рындин Максим	Березники
3	Memet Edvin	Romania
3	Ianus Andrada	Romania
	Победители первой лиги	
1	Семёнов Станислав	Саров
1	Сексембаев Жандос	Казахстан
2	Степанов Сергей	Якутия
2	Васильева Сахаяна	Якутия
2	Федотов Игорь	Дубна
2	Микелов Артём	Дубна
3	Таинов Ренат	Казахстан
3	Емельянов Борис	Якутия
3	Плешаков Руслан	Владивосток
3	Карпов Иван	Иркутск
3	Масунова Дарья	Саров
3	Нашаров Аскар	Казахстан
3	Цой Пётр	Якутия

Следует отметить, что с этого года олимпиада «Туймаада» входит в список мероприятий, победители которых могут номинироваться на президентскую стипендию. Номинантом-2006 по физике стала Васильева Сахаяна, показавшая лучший результат в сложном экспериментальном туре.

В течение олимпиады были устроены экскурсии в институт мерзлотоведения, алмазный фонд, а также пешеходные и автобусные экскурсии по городу. У школьников каждый день был наполнен общением со сверстниками, проводились вечера дружбы, конкурсы национальных песен и танцев, спортивные игры. Венцом олимпиады было двухдневное путешествие на теплоходе по национальному природному парку «Ленские столбы». Участники олимпиады увидели своими глазами уникальное творение природы — знаменитые «Ленские столбы». Эти скалы причудливой формы тянутся на протяжении десятков километров по правому берегу реки Лены, одной из величайших рек мира. Для впервые побывавших в Якутии это фантастическое зрелище стало её своеобразной визитной карточкой.

Якутия уже в течение тринадцати лет показывает блестящие возможности и опыт проведения олимпиад очень высокого уровня. Это даёт повод надеяться на право проведения в будущем учебном году заключительного этапа Всероссийской олимпиады в Якутске.

Председатель жюри Григорьев Юрий Михайлович,
заместитель председателя жюри
студент МФТИ Муравьёв Вячеслав Михайлович,
преподаватель физики республиканского колледжа-интерната
заслуженный учитель РФ Потапов Виктор Филиппович

Награждают победителей олимпиады Ноев А. И, председатель жюри Григорьев Юрий Михайлович и его заместитель Муравьёв Вячеслав Михайлович

Разминка между награждениями

Местный обряд очищения

Условия задач первой лиги

Задача 1. Ряд брусков. На гладкой горизонтальной поверхности расположены в ряд $n \geqslant 5$ брусков (рис. 1). Между всеми брусками имеются промежутки. Первому бруску массой m_1 сообщили скорость v_1 в направлении к остальным брускам. Определите, при каких массах m_i средних брусков $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$ скорость последнего бруска массой m_n окажется максимальной. Найдите величину этой максимальной скорости v_n. Все соударения брусков абсолютно упругие. Скорость последнего бруска измеряется сразу после первого соударения с предпоследним бруском. Считайте, что промежутки между брусками таковы, что до этого момента каждый брусок соударяется с каждым из соседних ровно по одному разу.

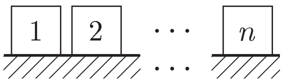

Рис. 1

(Чудновский А.)

Задача 2. Человек на плоту. Человек массой m_1 стоит на краю плота массой m_2. Плот покоится в озере. В некоторый момент человек начинает идти вдоль плота и останавливается на другом краю. Найдите смещение плота после того, как его движение прекратится. Сила сопротивления со стороны воды равна $\vec{F} = -k\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость плота, k — заданный коэффициент пропорциональности.

(Манаков А.)

Задача 3. Миниатюрный кипятильник. В теплоизолированной пробирке с малой теплоёмкостью находится $m_1 = 1$ г воды и $m_2 = 1$ г льда в состоянии термодинамического равновесия. В пробирку помещают миниатюрный кипятильник, который подключён к источнику тока с ЭДС $\mathscr{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) кипятильника приведена на графике (рис. 2). Определите, через какое время t вода в пробирке закипит. Теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C), теплота плавления льда $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

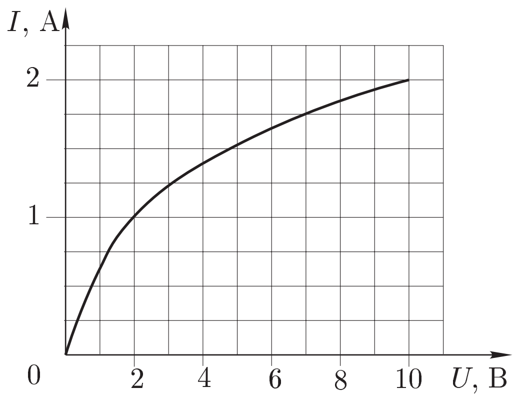

Рис. 2

(Чудновский А.)

Задача 4. Схема. Определите сопротивление цепочки (рис. 3) между точками A и B, если сопротивление каждого звена цепи равно r. (Любшин Д., Муравьёв В.)

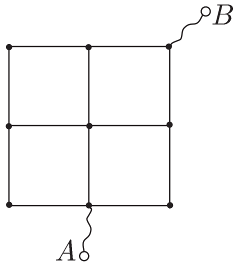

Рис. 3

Условия некоторых задач высшей лиги

Задача 2. Пузыри. В лаборатории проводятся исследования поведения мыльных пузырей. В качестве исходного материала используется раствор поверхностно активного вещества (ПАВ) в жидкости. Среднее расстояние между молекулами в растворе $a = 5 \cdot 10^{-10}$ м, на $c = 10$ молекул раствора приходится одна молекула ПАВ. Коэффициент поверхностного натяжения ПАВ $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$Дж/м^2.

1. Найдите максимальный радиус мыльных пузырей $r_{\max}$, которые можно выдуть из капли раствора, имеющей радиус $r = 0{,}5$ мм. Рассчитайте толщину плёнки этого пузыря h. Мыльная плёнка устойчива только в том случае, когда её поверхность полностью покрыта молекулами ПАВ. Получите также численные выражения искомых величин.

2. Рассматривается процесс «слипания» двух мыльных пузырей радиусами $r_1 = 0{,}1$ м и $r_2 = 0{,}15$ м. Оцените силу F, с которой они притягиваются на начальном этапе объединения. Предполагается, что на ранних этапах объединения плёнка между пузырями плоская. Получите численное значение этой силы.

3. После окончания «слипания» двух мыльных пузырей радиусами $r_1 = 0{,}1$ м и $r_2 = 0{,}15$ м и завершения всех переходных процессов оказалось, что мембрана между ними приняла форму участка сферической поверхности. Определите её радиус r_3. Предполагается, что участки поверхностей пузырей, не затронутые «слипанием», не изменили своей формы.

4. Исследуйте устойчивость мыльной плёнки толщиной h, в которой образовался прокол радиусом r. Определите, при каком соотношении между r и h мыльная плёнка будет находиться в состоянии равновесия. (Дзябура Е.)

Задача 4. Стеклянная призма. Стеклянная призма, основание которой имеет ромбическую форму, находится в воздушном пространстве (рис. 4), причём у призмы $\angle BAD = \angle BCD = \theta$. Узкий луч жёлтого света падает в плоскости рисунка параллельно диагонали AC на грань AB призмы. Луч испытывает полное внутреннее отражение от граней AD и DC и выходит из призмы через грань BC. При решении задачи считайте, что для жёлтого света показатель преломления стекла $n = 1{,}60$, а для воздуха $n' = 1$.

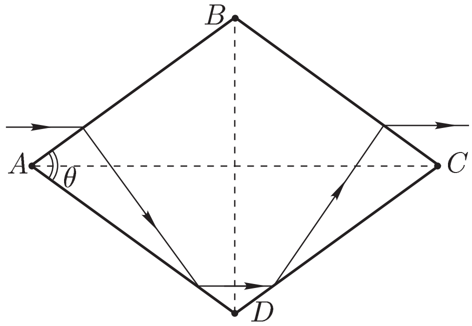

Рис. 4

1. При каком значении угла θ раствора призмы (как функции показателя преломления n) полное отклонение луча от своего первоначального направления будет нулевым? Найдите численное значение θ, выраженное в градусах и минутах.

Оставим расположение призмы в пространстве и направление падающего луча прежними, но изменим характер падающего излучения. Пусть теперь падающий луч состоит из жёлтого дублета ртути. Дублет состоит из волн с длинами $579{,}1$ нм и $577{,}0$ нм. Показатели преломления стекла для этих длин волн равны соответственно $n = 1{,}60$ и $n + \Delta n$, где $\Delta n = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$. Луч света, выходящий из призмы, направляется соосно в астрономический телескоп, настроенный на бесконечное расстояние.

2. Определите угловое рассояние ε между двумя изображениями, видимыми в телескопе, как функцию n и Δn. Найдите также численное значение ε.

3. Известно, что фокусное расстояние объектива телескопа $f = 0{,}4$ м. Найдите линейное расстояние между двумя изображениями, видимыми в фокальной плоскости объектива. (Prof. Uliu Florea)

Решения задач первой лиги

Задача 1. Рассмотрим сперва случай $n = 3$. Пусть v_1' и v_2 — скорости брусков m_1 и m_2 после их соударения между собой, тогда законы сохранения импульса и энергии имеют вид:

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2, \qquad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}, \qquad \text{откуда} \qquad v_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Аналогично рассматривая соударение брусков m_2 и m_3, находим

$$v_3 = \frac{2m_2v_2}{m_2+m_3} = \frac{4m_1m_2v_1}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}.$$

Массы крайних брусков фиксированы, а найти необходимо такую массу m_2, при которой v_3 максимальна. Для этого вычислим производную и приравняем её нулю:

$$\frac{dv_3}{dm_2} = 4m_1v_1\frac{(m_1+m_2)(m_2+m_3) - m_2(m_2+m_3+m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Таким образом, для эффективной передачи скорости при соударениях нужно, чтобы массы соседних брусков отличались в одинаковое число раз.

Справедливость данного утверждения для произвольного $n \geqslant 3$ докажем от противного. Допустим, что v_n максимальна при наборе m_i, в котором не все массы соседних брусков отличаются в одинаковое число раз. Тогда рассмотрим три бруска ($i-1$, i, $i+1$), для которых $m_{i+1}/m_i \neq m_i/m_{i-1}$. Из результата, полученного для $n = 3$, следует, что скорость v_{i+1} возрастёт, если принять $m_i = \sqrt{m_{i-1}m_{i+1}}$. Пропорционально v_{i+1} возрастёт и v_n, так как скорость каждого следующего бруска прямо пропорциональна скорости предыдущего:

$$v_{i+1} = \frac{2m_i v_i}{m_i + m_{i+1}}.$$

Полученное противоречие (в предпосылке v_n максимальна, но её удалось увеличить) доказывает утверждение:

$$\frac{m_{i+1}}{m_i} = \frac{m_i}{m_{i-1}} = k \quad \text{при} \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1,$$

то есть значения масс образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $k = \sqrt[n-1]{m_n/m_1}$. Таким образом,

$$m_i = m_1 \cdot k^{i-1} = m_1 \left(\frac{m_n}{m_1}\right)^{\frac{i-1}{n-1}}.$$

Для определения скорости v_n найдём «коэффициент передачи скорости»:

$$v_{i+1} = \frac{2m_i v_i}{m_i + m_{i+1}} = \frac{2}{1+k} v_i,$$

откуда

$$v_n = v_1 \left(\frac{2}{1+k}\right)^{n-1} = v_1 \left(\frac{2}{1 + \sqrt[n-1]{m_n/m_1}}\right)^{n-1}.$$

Задача 2. Пусть v_1 — скорость человека, v_2 — скорость плота, x_2 — координата плота, тогда величина полного импульса системы

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Закон изменения импульса для системы, состоящей из плота и человека:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = -kv_2, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{\Delta}{\Delta t}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = -kv_2.$$

Заметим, что $v_2 = \Delta x_2 / \Delta t$, поэтому

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + kx_2) = 0.$$

Поскольку производная по времени равна нулю, то

$$m_1 v_1^{\text{кон}} + m_2 v_2^{\text{кон}} + kx_2^{\text{кон}} = \text{const} = m_1 v_1^{\text{нач}} + m_2 v_2^{\text{нач}} + kx_2^{\text{нач}}.$$

А поскольку $v_1^{\text{нач}} = v_2^{\text{нач}} = v_1^{\text{кон}} = v_2^{\text{кон}} = 0$, то $x_2^{\text{кон}} = x_2^{\text{нач}}$, то есть плот вернётся в прежнее положение.

Задача 3. Сначала найдём мощность кипятильника P, а для этого нам нужно знать силу тока I через него и напряжение U на нём. Запишем закон Ома для схемы подключения (рис. 5):

$$\mathscr{E} = Ir + U, \qquad \text{откуда} \qquad I = \frac{\mathscr{E} - U}{r}.$$

Однако I и U не произвольны, а должны удовлетворять ВАХ кипятильника — зависимости $I = f(U)$, заданной графически. Точка пересечения линий $I = (\mathscr{E} - U)/r$ и $I = f(U)$ на графике $I(U)$ как раз и будет рабочей точкой кипятильника (рис. 6). Из графика находим $U \approx 1{,}5$ В, $I \approx 0{,}8$ А. Следовательно, для закипания воды требуется теплота

$$Q = \lambda m_2 + c(m_1 + m_2)(100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) = 3{,}14 \text{ кДж}.$$

Необходимое для закипания воды время

$$t = \frac{Q}{UI} = 2{,}6 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 44 \text{ мин}.$$

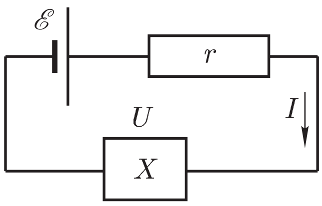

Рис. 5

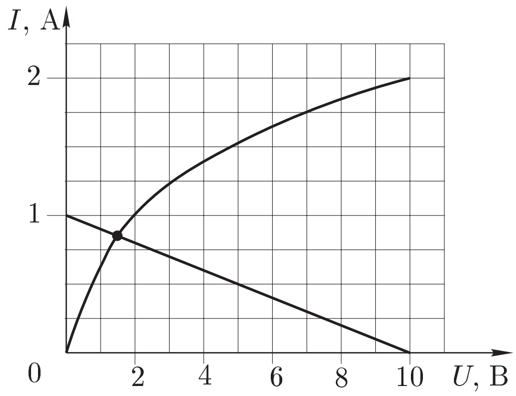

Рис. 6

Спортивные мероприятия для участников

Приз победителям эстафеты

Задача 4. При решении задачи воспользуемся тем, что схемы треугольника (рис. 7) и звезды (рис. 8) эквивалентны при условии, что

$$R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \qquad R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \qquad R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Перерисуем исходную схему (рис. 9) и, применяя преобразование треугольник-звезда к цепи между точками C, D и E, приходим к схеме, изображённой на рисунке 10. Далее повторно пользуемся преобразованием треугольник-звезда для цепи между точками C, G и F (рис. 11). Окончательно получаем мостиковую схему (рис. 12), которую удобнее всего рассчитать, преобразовав цепь правого треугольника в звезду (рис. 13):

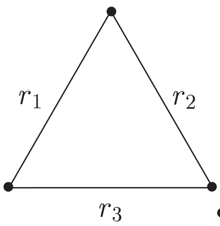

Рис. 7

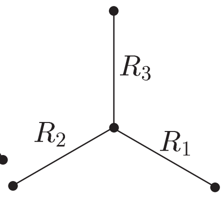

Рис. 8

$$R = \frac{9}{14}r + \frac{\frac{19}{7}r \cdot \frac{5}{7}r}{\frac{19}{7}r + \frac{5}{7}r} = \frac{29}{24}r.$$

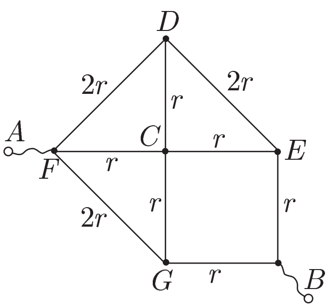

Рис. 9

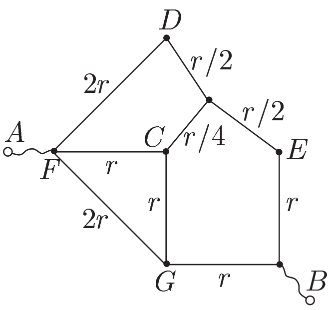

Рис. 10

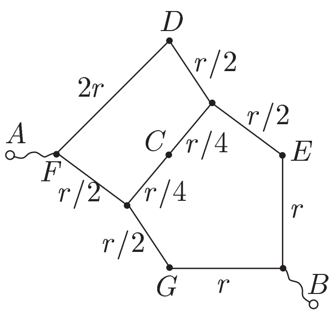

Рис. 11

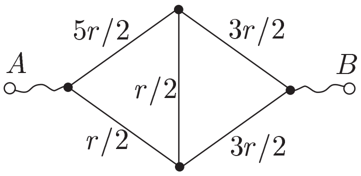

Рис. 12

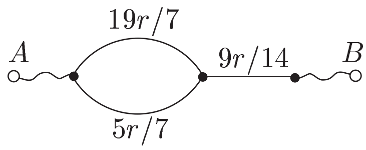

Рис. 13

Решения некоторых задач высшей лиги

Задача 2. Количество N_1 молекул ПАВ в капле раствора и количество N_2 молекул на внешней и внутренней поверхностях мыльного пузыря, выдутого из этой капли, составляют:

$$N_1 = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{a^3}\frac{1}{c}, \qquad N_2 = 2 \cdot 4\pi \frac{r_{\max}^2}{a^2}.$$

Если размер пузыря максимален, то $N_1 = N_2$, откуда:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{r^3}{6ca}} = 6{,}5 \text{ см},$$

а толщина мыльной плёнки

$$h = a(2c - 1) = 9{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

При слипании мыльные пузыри будут понижать свою энергию за счёт уменьшения площади поверхности. На начальном этапе слипания (рис. 14) $h_1 + h_2 \ll r_1$ и $h_1 + h_2 \ll r_2$, поэтому уменьшение прощади $\delta S = \pi x^2$. Из геометрических соображений

$$2r_1 h_2 = x^2, \qquad 2r_2 h_1 = x^2.$$

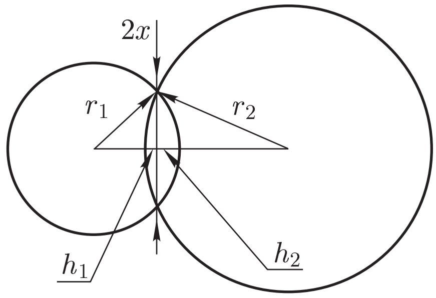

Рис. 14

Пусть $h = h_1 + h_2$, тогда

$$h = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Изменение энергии $\delta W = 2\pi x^2 \sigma = 4\pi\sigma h \left(r_1^{-1} + r_2^{-1}\right)^{-1}$. Используя выражение для изменения энергии, найдём силу притяжения между пузырями:

$$F = \frac{\delta W}{h} = 4\pi\sigma \frac{1}{\left(r_1^{-1} + r_2^{-1}\right)} = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

Плёнка между мыльными пузырями примет форму участка поверхности сферы и будет компенсировать разность давлений внутри пузырей. Давления внутри первого P_1 и второго P_2 пузырей опреляются выражениями:

$$P_1 = P_a + \frac{4\sigma}{r_1}, \qquad P_2 = P_a + \frac{4\sigma}{r_2},$$

где P_a — атмосферное давление. Поэтому для плёнки между пузырями получим:

$$P_1 - P_2 = \frac{4\sigma}{r_3},$$

где r_3 — её радиус. Окончательно находим

$$r_3 = \left(r_1^{-1} - r_2^{-1}\right)^{-1} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Рассмотрим поверхность, которая образуется в области прокола (рис. 15). Такая поверхность характеризуется двумя радиусами кривизны: $-r$ и $h/2$, каждый из которых определяет соответствующее давление: $P_1 = \sigma/r$ и $P_2 = 2\sigma/h$. В случае равенства давлений плёнка находится в состоянии равновесия. Поэтому равновесный радиус прокола $r = h/2$.

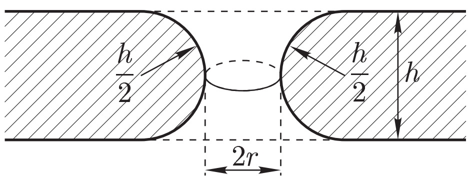

Рис. 15

Задача 4. Из соображений симметрии для того, чтобы луч вышел из призмы параллельно AC, отрезок луча FG должен быть параллелен AC. При этом $\angle GFD = \angle EFA = \theta/2$ (рис. 16). Тогда из треугольника AEF следует, что $\angle AEF = 180^\circ - 3\theta/2$. Поэтому для преломления в точке E имеем

$$\frac{\sin(90^\circ - \theta/2)}{\sin(90^\circ - 3\theta/2)} = n, \qquad \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(3\theta/2)} = n.$$

После тригонометрических расчётов находим

$$\cos(3\theta/2) = \cos(\theta+\theta/2) = \cos\theta\cdot\cos(\theta/2) - \sin\theta\cdot\sin(\theta/2) = 4\cos^3(\theta/2) - 3\cos(\theta/2).$$

Подставляя полученное соотношение в закон Снеллиуса, получаем

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{3n+1}{4n}}, \qquad \text{откуда} \qquad \theta = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{3n+1}{4n}}\right) \approx 35^\circ 39'.$$

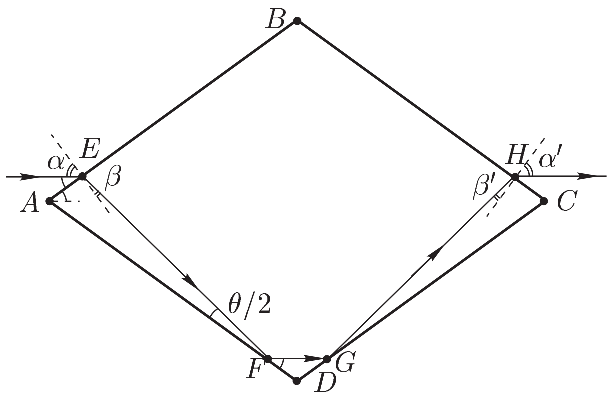

Рис. 16

Пусть α — угол падения луча на призму, β и $\beta+\Delta\beta$ — углы преломления, отвечающие показателям преломления n и $n+\Delta n$ (рис. 16). Согласно закону Снеллиуса $\sin\alpha = n\sin\beta$, откуда, дифференцируя при фиксированном угле падения α, имеем

$$n\cos\beta\cdot\Delta\beta + \Delta n\sin\beta = 0. \tag{1}$$

Пусть α' — угол выхода луча из призмы, β' и $\beta' + \Delta\beta'$ — углы падения на границе стекло-воздух, отвечающие показателям преломления n и $n+\Delta n$ (рис. 16). Тогда аналогично случаю падения можно записать:

$$n\cos\beta'\cdot\Delta\beta' + \Delta n\sin\beta' = \cos\alpha'\cdot\Delta\alpha'. \tag{2}$$

Поскольку $n \gg \Delta n$, то можно положить $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Однако следует отметить, что $\Delta\alpha \neq \Delta\alpha'$ и $\Delta\beta \neq \Delta\beta'$. Покажем, что $\Delta\beta = -\Delta\beta'$. Действительно, из треугольников AEF и CHG имеем, что $\angle EFA = 90^\circ - \beta - \theta$ и $\angle HGC = 90^\circ - \beta' - \theta$. Далее рассмотрим треугольник FGD, для него $\theta = \angle GFD + \angle FGD$, а поскольку $\angle FGD = \angle HGC$ и $\angle GFD = \angle EFA$, то $\beta + \beta' = 180^\circ - 3\theta$. Теперь, производя дифференцирование, приходим к искомому результату: $\Delta\beta = -\Delta\beta'$. Для нахождения угла $\varepsilon = \Delta\alpha'$ между двумя выходящими из призмы лучами воспользуемся полученным выше соотношением между $\Delta\beta$ и $\Delta\beta'$, а также уравнениями (1) и (2):

$$-\Delta\beta = \frac{\Delta n \sin\beta}{n\cos\beta} = \Delta\beta' = \frac{\varepsilon\cos\alpha - \Delta n\sin\beta}{n\cos\beta}, \quad \varepsilon = 2\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\Delta n = 2\frac{\cos(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Delta n.$$

Пользуясь полученными ранее выражениями для $\cos(3\theta/2)$ и $\cos(\theta/2)$, приходим к ответу:

$$\varepsilon = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{3n+1}{n-1}}\Delta n \approx 1{,}75'.$$

Для определения линейного расстояния y между двумя изображениями, видимыми в фокальной плоскости объектива, достаточно знать f и ε:

$$y = f\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \approx \varepsilon f = \frac{2f}{n}\sqrt{\frac{3n+1}{n-1}}\Delta n = 0{,}2\ \text{мм}.$$

Памятник мамонту

Ленские столбы

Музей мамонта

Публикацию подготовил А. Чудновский.