Потенциал

Издание для старшеклассников и учителей

Январь 2005

Содержание

Реформы в образовании

Адрес: 141700, г. Долгопрудный
Московская обл., Институтский пер., 9
тел. 408-89-89, 787-24-94
E-mail: azbuka@nm.ru
www.potential.org.ru

Подписано в печать 21.12.2004
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 5
Формат 70x100 1/16
тираж 950 экз.
Заказ №1
ЗАО «Издательство «Азбука»
109544, г. Москва, ул. Рабочая, 84

ISBN 5-8012-0013-4

Чугунова Тамара Алексеевна – *директор Государственного образовательного учреждения дополнительного образования детей «Федеральная заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте (государственном университете)», заслуженный учитель Российской Федерации.*

Окончила физико-математический факультет МГПИ им. В.И.Ленина в 1954 году по специальности «физика», возглавляет ЗФТШ при МФТИ с момента её создания в 1966 г., награждена медалью Ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, лауреат премии федеральной целевой программы «Одарённые дети» президентской программы «Дети России» за особый вклад в работу с одарёнными детьми.

Дорогие читатели!

Вы держите в руках издание, выпуск которого начинают Заочная физико-техническая школа при МФТИ совместно с издательско-полиграфической фирмой «Азбука». Мы надеемся, что настоящее издание будет полезно не только старшеклассникам и учителям общеобразовательных учреждений, вовлечённым в учебный процесс ЗФТШ, но и другим читателям. Часть публикаций издания будут являться своего рода дополнением и углублением материалов заданий заочной школы по соответствующим разделам образовательных программ. Мы уверены, что наше издание окажет помощь ученикам в самостоятельной работе в школе, подготовке к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы.

Создатели издания не планируют замыкаться в хотя и большом, но всё же ограни-ченном круге «элитных» читателей, а постараются сориентировать «Потенциал» на более широкую аудиторию «приверженцев» естественно-математических наук, а именно – физики, математики и информатики. На страницах издания старшеклассники и учителя смогут узнать о замечательных и актуальных научных достижениях и разработках (рубрика «Загадочный мир»), об интересных исторических событиях и периодах в развитии науки, образования, организации и становления различных учебных заведений (рубрика «Сквозь время»), получить или дополнить знания по конкретным учебным предметам (рубрики «Физика», «Математика», «Информатика»), ознакомиться с задачами вступительных экзаменов в различные вузы страны и материалами предметных олимпиад, включая международные (рубрики «Вступительные экзамены», «Олимпиады»). На интересующихся вопросами профильного образования рассчитана рубрика «Профильное образование», где будут публиковаться методические материалы по разделам учебных предметов, освещаться теоретические и практические аспекты дополнительного профильного образования, информационные материалы об учреждениях профильного дополнительного образования. Вопросам модернизации российского образования посвящена рубрика «Реформы в образовании», в которой предполагается публиковать официальные материалы по вопросам ЕГЭ, профильному образованию, образовательным стандартам, программы (проекты) развития различных видов образования, а также, по возможности, компетентные комментарии к ним.

Разумеется, неизбежно возникновение новых рубрик и разделов издания, в связи с чем мы будем признательны Вам за предложения и рекомендации по улучшению структуры издания, его оформлению, оптимизации и наполнению его рубрик, качеству и тематике материалов, в них содержащихся. Кроме этого, Вы можете предлагать нам свои интересные и полезные материалы, которые, на Ваш взгляд, могли бы найти место на страницах данного издания. Возможна организация в рамках настоящего издания своего рода заочного круглого стола по обмену опытом, мнениями и предложениями, поступающими от наших читателей на местах в различных регионах страны. Обо всём этом нам хотелось бы узнать Ваше мнение. Пишите нам!

Учредители и авторы пособия поздравляют Вас с наступившим 2005 годом (годом физики по решению ЮНЕСКО) и выражают искреннюю надежду на то, что с выходом в свет нашего нового издания интеллектуальный потенциал старшеклассников – будущих студентов – будущих учёных будет неуклонно расти, а вмести с ним, и благодаря этому, будет расти и уровень развития нашего государства.

Трухан Эдуард Михайлович
В 1959 г. окончил радиотехнический факультет (ныне ФРТК) МФТИ, в 1962 г. – аспирантуру ФМХФ. С 1982 по 1997 гг. был деканом факультета физико-химической биологии (ФФХБ) МФТИ (с 1997г. на базе ФМХФ и ФФХБ был создан объединённый факультет молекулярной и биологической физики, ФМБФ). В настоящее время – заведующий кафедрой биофизики и экологии. Доктор физико-математических наук. Профессор МФТИ. Круг научных интересов: физика, биология, экология.

БИОЭНЕРГЕТИКА ГЛАЗАМИ ФИЗИКА

Научное понятие биоэнергетики вполне определено: это – раздел биофизики, связанный с изучением принципов и механизмов преобразования энергии в живых объектах. Наряду с этим можно часто встретить, особенно в популярных статьях и в средствах массовой информации, другое менее определённое ненаучное употребление этого термина, введённого в обиход целителями, экстрасенсами, ясновидцами. В данной статье речь пойдёт о биоэнергетике в обычном научном понимании.

Основная особенность живого организма независимо от уровня его организации – одна клетка или высокоорганизованная система – с точки зрения физики, – это его неравновесность. Это особое состояние живого объекта проявляется в двух аспектах. Во-первых, неравновесна его структура. Она специально организована, а законы термодинамики предполагают, что при конечной температуре всякая изолированная система должна со временем хаотизироваться, т.е. терять свою уникальность. Чтобы противостоять этой естественной тенденции и в течение длительного периода (в буквальном смысле «времени жизни») сохранять и развивать свою уникальность, любой организм, раз возникнув, не должен оставаться изолированным: он должен непрерывно черпать из окружающей среды свободную энергию. Постепенно диссипируясь в организме и превращаясь в тепловую, эта энергия поддерживает неравновесную структуру. Второй аспект, тесно связанный с первым, проявляется в необычных, с точки зрения «равновесной» термодинамики, путях диссипации энергии в организме. Прежде, чем новая порция энергии успеет равномерно «размазаться» по всем степеням свободы, как того требует равновесная термодинамика, она успевает вызвать химические превращения, характерные для каждой живой структуры. Уникальная структура обеспечивает быстрое использование избыточной энергии по некоторым выделенным степеням свободы. Условно говоря, эти степени свободы являются «горячими», как будто их температура значительно выше температуры остальной системы. Таким образом, постоянный приток свободной энергии извне в живую систему поддерживает неравновесный характер не только самой структуры живой материи, но и неравновесный характер протекающих в ней процессов. Это важнейшее свойство живой системы.

Уместно вспомнить, что свободная энергия – это та часть полной энергии системы, которая может быть превращена в работу при изотермических условиях. В природе есть много форм свободной энергии, и на заре возникновения жизни на Земле неизбежно возник вопрос о том, какая форма свободной энергии наилучшим образом может обеспечить большие объёмы превращения энергии, вещества и информации в живой природе.

Рассмотрим конкретные примеры.

Электрическая энергия. В природе встречаются источники электрического потенциала и электрические токи (статическое атмосферное электричество, грозовые разряды, разности потенциалов и токи между разными участками земной коры вдоль поверхности и в глубинном направлении, электрические токи в морской воде). Но эти источники не имеют необходимой регулярности и стабильности, в особенности источники разрядного типа. А главное, для их использования потребовались бы проводники к каждому организму и к каждой клетке. Ясно, что электричество как источник свободной внешней энергии для живого объекта не пригодно, хотя отдельные клетки и даже органы могут откликаться на подводимые к ним токи и напряжения.

Механическая энергия. Таковая может существовать в природе в виде механических усилий (сжатий, растяжений, скручиваний), вызывающих деформации живых тканей, мембран, больших молекул и передающихся через воду, воздух, контактные связи. В принципе это возможно, но трудно себе представить, как это организовать, сохраняя независимость и подвижность организмов, а главное что будет общим источником механической энергии, ведь от него требуется доступность и стабильность. Хотя и в этом случае, как и в предыдущем, отдельные клетки и органы могут хорошо воспринимать механические воздействия, но в качестве сигналов, а не источников энергии.

Тепловая энергия. Энергия теплового движения также может служить источником свободной энергии. Вспомним хотя бы паровую машину или двигатель внутреннего сгорания. Но для его реализации нужны отдельные нагреватель и холодильник с заметной разницей температур, т. к. коэффициент полезного действия такого устройства пропорционален разности температур между нагревателем и холодильником. И если в пределах биосферы такие условия можно найти (разность температур между полярными и экваториальными областями довольно значительны), то обеспечить существенные перепады температуры внутри организма, тем более внутри клетки, конечно, невозможно. Поэтому построить живой организм как тепловую машину вряд ли возможно.

Атомная (или, точнее, ядерная) энергия. В природе существуют процессы ядерного распада и, наоборот, ядерного синтеза, которые сопровождаются выделением энергии в виде кинетической энергии продуктов этих реакций, в большей своей части переходящей в тепло. Именно эту энергию используют на современных атомных электростанциях и планируют использовать в будущих термоядерных станциях. О трудностях использования тепловой энергии в живых системах мы только что говорили. Некоторая часть разлетающихся продуктов ядерных реакций имеет электрический заряд, и их движение сопровождается выделением энергии электромагнитного излучения и электрической энергии, которые в принципе можно было бы использовать как источник свободной энергии для живых систем. Но средняя плотность этой энергии на поверхности земли ничтожно мала и никак не может покрыть потребности биосферы. Но главное, конечно, не в этом, а в том, что быстро летящие осколки ядер и элементарные частицы очень агрессивны по своему химическому характеру и губительны для живой клетки. Так смертельное поражение человека наступает при дозе ионизирующей радиации, соответствующей поглощённой энергии 300 Дж, в то время как суточное потребление энергии человеком из других «полезных» источников составляет 10 МДж!

Гравитационная энергия. Реально это – потенциальная энергия в поле тяжести Земли. Эта энергия может быть превращена в кинетическую или потенциальную энергию деформации живой ткани лишь при опускании первоначально поднятого тела. Трудно себе представить механизм её восполнения после однократного использования. Это тоже неподходящий вид энергии.

Энергия света. Источник такой энергии – это практически неиссякаемое наше светило – Солнце. Тепловая энергия светового Потока создаёт для жизни благоприятные условия в виде температуры, которую мы по определению называем нормальной и комфортной. Но это ещё не источник свободной энергии для обеспечения жизненных процессов. О трудностях преобразования тепловой энергии в свободную мы уже говорили выше. Однако лучистая энергия солнца не ограничивается только теплом. Энергия квантов видимого света достаточно велика для возбуждения электронных степеней свободы молекул и инициирования определённых биологически важных химических реакций. В то же время излишне энергичных квантов жёсткого ультрафиолета, вызывающих деструктивные процессы, в солнечном свете, достигающем поверхности Земли, немного. Поэтому энергия солнечного света – вполне подходящий источник свободной энергии для живых объектов. Но у него есть два больших недостатка: плотность потока энергии солнечного света сравнительно невелика и интенсивность потока энергии на данную площадь из-за суточного вращения земли непостоянна: около половины суток занимает тёмный период.

Первый недостаток проявляется в том, что организмы, использующие этот источник энергии (а это, как известно, растения), обречены на постоянный дефицит энергии. В частности, они не могут позволить себе самостоятельно перемещаться в пространстве, хотя иногда это было бы полезно, например, чтобы перебраться на более освещённое место или спастись от животного, вознамерившегося съесть растение. Поэтому растительные организмы были вынуждены изобрести другие механизмы решения подобных проблем.

Второй недостаток привёл к необходимости создания в организмах, живущих за счет солнечной энергии, системы запасания энергии света в каких-то относительно стабильных формах, из которых эту энергию можно вернуть и использовать в тёмный период суток. Эта форма хранения свободной энергии – химическая. Её сущность – консервация части энергии вызванного светом электронного возбуждения молекул в энергию химических связей при синтезе подходящих для этой цели новых соединений. Поэтому организмы, использующие энергию световых квантов (фотонов) и называются *фотосинтезирующими*. Хорошо известны соединения двух типов, способных запасать энергию. Это соединения, содержащие фосфатные связи (например, аденозинтрифосфорная кислота, АТФ) и углеводы (упрощённо говоря, сахара, например, глюкоза). Фосфатная связь – очень удобный промежуточный хранитель химической энергии: при гидролизе одной такой связи (т.е. при её «разрыве» и переносе фосфатной группы на воду) выделяется около 0,5 электрон-вольт энергии, что хорошо соответствует энергии, требуемой для разнообразных элементарных процессов в клетке. Но именно потому, что она широко востребована во внутриклеточных процессах, её концентрация в живой клетке не может быть высокой и при прекращении синтеза АТФ она гидролизуется полностью за время около минуты. Таким образом, соединения типа АТФ не могут быть долгосрочным хранителем свободной энергии и, тем более, переносчиком энергии к другим организмам. Другое дело углеводы, это значительно более стабильные аккумуляторы энергии, способные обеспечить запас энергии растительному организму на весь темновой период до следующего светового дня, а также переносить в своей массе химическую энергию в другие организмы, если таковые сумеют этим воспользоваться. В энергии своих химических связей углеводы содержат около 20% энергии фотонов, использованных для их синтеза. Впрочем, об использовании химической энергии отдельный разговор.

Химическая энергия. Это та часть свободной энергии химических реагентов, которая может быть выделена при изменении химических связей в процессе превращения реагентов или при изменении их концентрации (точнее, активности). Последняя часть определения (про концентрацию или активность) напоминает о том, что свободная энергия химической системы определяется не только типом химических соединений исходных веществ и продуктов реакции, но и их концентрацией. При прочих равных условиях, чем выше концентрация, тем выше запас «потенциальной» энергии вещества: концентрация вещества в одном месте пространства не выгодна в термодинамическом смысле, тепловое движение стремится «размазать» вещество по всему пространству, и из этого процесса тоже можно извлечь энергию. Отсюда становится понятной и поправка на активность реагентов: эта дополнительная потенциальная энергия вещества определяется не полным количеством вещества в данном месте, а лишь количеством частиц активных, т. е. свободных для движения и участия в реакциях. Эту поправку часто не учитывают, а между тем она может оказаться очень важной для молекулярной биоэнергетики. Впрочем, в данном случае мы не будем этого касаться.

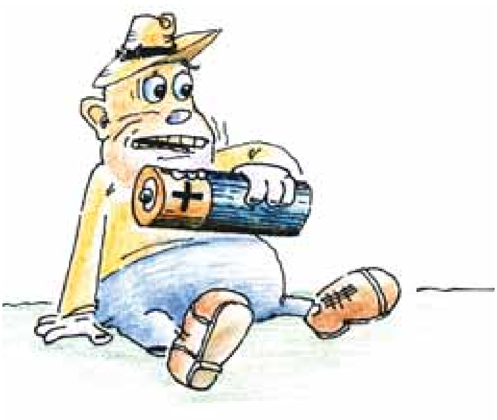
Источников химической энергии в окружающей среде великое множество: огромное количество окружающих нас химических соединений можно преобразовать в другие с получением энергии. Но при этом возникает очень сложная проблема. Для того, чтобы эти преобразования шли с достаточно большой скоростью, необходимы соответствующие катализаторы. В живой клетке это большие белковые молекулы, именуемые ферментами, включённые в сложные комплексы специальной структуры. Для каждого типа химического превращения нужны свои ферментные системы. Разумеется, ни у какой клетки не хватит ресурсов содержать такое сложное и разнородное хозяйство. В живой клетке может реализоваться только то, что просто, надёжно и выгодно. Сосредоточиться же на использовании какого-либо одного типа реакций для извлечения энергии – значит заведомо ограничить возможности получения энергии, несмотря на её изобилие в окружающей среде. Как решить эту проблему?

Природа нашла блестящий компромиссный выход из этого положения.

Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что живые организмы из огромного разнообразия химических реакций, способных в принципе поставлять живой клетке подходящую энергию, выделили лишь те, которые относятся к одному большому классу окислительно-восстановительных реакций. Физическая сущность окислительно-восстановительных реакций при всём многообразии их химических разновидностей заключается в переносе электрона от молекулы, в которой он находится на орбитали, соответствующей высокой энергии электрона (такие молекулы, доноры электрона, называются восстановителями), на молекулу, имеющую электронную вакансию на орбитали, соответствующей низкой энергии электрона (такие молекулы, акцепторы электрона, называются окислителями). Такая реакция называется окислительно-восстановительной, т.к. при этом происходит окисление молекулы-донора и восстановление молекулы-акцептора. Энергия электрона на доноре и акцепторе условно характеризуется некоторыми окислительно-восстановительными потенциалами. Большей энергии электрона соответствует более отрицательный потенциал, меньшей энергии – более положительный. Алгебраическая разность потенциалов участников такого электронного обмена характеризует движущую силу процесса. Потенциалы выражаются в вольтах, а соответствующая разность энергий легко выражается в электрон-вольтах. Так, разность потенциалов между молекулярным кислородом, являющимся акцептором, и молекулярным водородом, являющимся донором, составляет 1,23 вольта, а выделяемая энергия – 1,23 электрон-вольта на 1 перенесённый электрон. Поскольку при этом свободная энергия окислительно-восстановительной пары уменьшается, то это термодинамически выгодный процесс и он идёт самопроизвольно, если ему не мешают какие-то кинетические факторы.

Так как окислительно-восстановительные реакции имеют, с точки зрения физики, единый электронный характер, то в принципе можно представить себе универсальный молекулярный реактор, который будет осуществлять перенос электронов от разных доноров на один легко доступный и удобный акцептор. Это важное обстоятельство и использовала живая природа. Она разделила все подходящие источники химической энергии на три больших класса органических соединений: углеводы, жиры и белки и выбрала в процессе естественного отбора эффективные ферментные системы преобразования веществ этих трёх классов, направляющие высокоэнергичные электроны из преобразуемых веществ на универсальные промежуточные переносчики электронов (биохимики обозначают их сокращённо НАД). При этом задача свелась к созданию универсального окислительно-восстановительного ферментного комплекса, который должен переносить электроны от восстановленной молекулы НАД (её обозначают НАДН) на некоторый универсальный акцептор, переводя молекулу НАД вновь в окисленное состояние (его обозначают НАД$^+$). В качестве универсального акцептора (окислителя) выбран молекулярный кислород. Получая электроны из этого ферментного комплекса и присоединяя ионы водорода из окружающего водного раствора, молекулы кислорода превращаются в обыкновенную воду, как конечный продукт окислительно-восстановительного процесса. Таким образом, получение химической энергии из огромного числа различных органических соединений обеспечивается всего четырьмя разными биохимическими системами: тремя системами предварительной переработки жиров, углеводов и белков и одной общей системой окончательного окисления промежуточного переносчика электронов. Остаётся только удивляться такому изящному решению сложной проблемы.

Но этим дело не ограничивается. Ведь нужно не только получить энергию от окисляемого вещества, но и не растерять её в виде тепла, а сохранить в какой-то более благородной форме, полезной для клетки. Эта задача решена живой природой не менее интересно. В повседневной действительности мы имеем возможность часто наблюдать окислительно-восстановительные процессы: горение, взрывы, коррозию металлов и т. п. Однако во всех этих процессах выделяемая энергия диссипируется в тепло. Это происходит из-за того, что движение электронов от доноров к акцепторам происходит хаотично и не имеет пространственной организации. Если же процесс организовать так, чтобы все электроны при этом двигались в одну сторону, то их движение создаст электрический ток, а разность окислительно-восстановительных потенциалов реализуется в виде электродвижущей силы. Именно так сделано в гальваническом элементе – электрической батарейке, там ведь тоже происходит окисление донора и восстановление акцептора, и когда их запас в элементе кончается, батарейка «разряжается». Сходные процессы происходят и в электрическом аккумуляторе, в котором воссоздание окислительно-восстановительной пары происходит периодически при «зарядке» элемента от другого источника тока.



Именно этот принцип пространственной упорядоченности окислительно-восстановительного процесса и использовала живая клетка. Заключительная стадия переноса электронов от НАД на кислород происходит во внутренних мембранах митохондрий – этих миниатюрных энергостанций клетки. При этом доноры электронов и соответствующие ферменты располагаются на одной плоскости мембраны, а акцепторы электронов и ферменты, организующие приём электронов,– на противоположной. В результате между двумя плоскостями мембраны возникает разность электрических потенциалов, т. е. химическая энергия пары топливо-окислитель преобразуется в электрическую энергию. Коэффициент полезного действия такого устройства близок к 100%, т. е. значительно превосходит КПД знакомых нам тепловых электростанций.

Есть, однако, два отличия этого преобразователя от обычного гальванического элемента. Первое заключается в том, что в данном случае реагенты подводятся непрерывно, и элемент работает до тех пор, пока к нему поступает топливо и окислитель, т. е. пока организм имеет возможность получать пищу и кислород. Поэтому митохондрию правильнее было бы называть не гальваническим, а топливным элементом. Такие устройства сейчас усиленно разрабатываются для промышленных целей, так как они имеют большие экологические и экономические преимущества перед традиционными электростанциями. Второе отличие более принципиальное. Оно связано с тем, что при окислении НАДН ионы водорода, связанные с восстановленной формой НАД, освобождаются и остаются у поверхности митохондриальной мембраны, в то время как на противоположной поверхности мембраны кислород, получивший электроны, связывает другие свободные ионы водорода, образуя молекулы воды. В результате между двумя поверхностями мембраны наряду с разностью электрических потенциалов (плюс на стороне, где окисляется топливо, и минус на стороне, где восстанавливается кислород) образуется избыток свободных ионов водорода на стороне, на которой возник **+**, и их недостаток на стороне, на которой возник **–**. Возникшая разность концентраций пытается протолкнуть ионы водорода сквозь мембрану в том же направлении, куда их влечёт образовавшаяся разность электрических потенциалов! Концентрационный потенциал суммируется с электрическим и образует общий электрохимический потенциал, побуждающий ионы водорода преодолеть толщу мембраны. Он и является мерой свободной энергии, запасённой мембраной за счёт окисления топлива. Его величина близка к разности окислительно-восстановительных потенциалов НАД и кислорода (около 1,1 вольта). Дальнейшая судьба этой энергии зависит от биологической функции клетки и от её текущего состояния.

Если, как это обычно бывает, материал мембраны не позволяет ионам водорода проникать через неё, электрохимический потенциал будет сохраняться неограниченно долго, сохраняя запасённую энергию. Если у мембраны возникнет протонная проводимость, то через неё потечёт банальный электрический ток и начнёт выделяться джоулево тепло. Такие процессы, имеющие приспособительный характер, действительно возникают в организме при холодовом воздействии. В большинстве же случаев запасённая энергия используется специальными ферментами, встроенными в мембрану, для синтеза АТФ из АДФ и неорганического фосфата. Эта реакция, как известно, не может идти самопроизвольно и требует подвода свободной энергии. Но, оказывается, в этом ферменте (он называется АТФ-синтаза) есть специальный канал для пропускания протонов сквозь мембрану. При этом энергия не переходит в тепло, а идёт на направленное вращение отдельных частей АТФ-синтазы. Посредством этих силовых движений и принуждается синтез АТФ, этого элементарного носителя биологических квантов энергии. Кстати, как выяснилось, синтез АТФ под действием света в растениях, который упоминался ранее, тоже идёт через посредство электрохимического потенциала на мембране фотосинтетического аппарата, только этот потенциал образуется здесь за счёт энергии фотонов.

Долгое время после открытия биоэнергетической роли АТФ считалось, что вся энергетика элементарных процессов в живой клетке обеспечивается циклическим процессом: синтез АТФ (запасание энергии) – гидролиз АТФ (реализация энергии). Открытие процесса образования электрохимического потенциала на митохондриальной мембране (а также на мембранах бактерий, мембранах фотосинтетического аппарата) дало повод пересмотреть это положение и обнаружить целый ряд процессов, энергетика которых обеспечивается непосредственно электрохимическим потенциалом ионов водорода на мембранах без посредничества АТФ. Помимо уже упомянутого выше дополнительного подогрева мембраны можно назвать в этой связи механическую работу, обеспечивающую передвижение одно- и многоклеточных микроорганизмов, принудительное перемещение некоторых ионов через мембрану против их электрохимического потенциала, распределение энергии по внутренним энергетическим сетям посредством передачи потенциала на значительные расстояния и некоторые другие.

Таким образом, найденный живой природой источник свободной энергии в виде окислительно-восстановительного потенциала, как одного из видов химической энергии, оказался весьма удачным. Он легко превращается в физическую форму внутри-клеточной энергии, которая в свою очередь оказывается довольно универсальной и может быть использована во многих элементарных процессах, а при необходимости быть преобразованной в ещё более универсальную химическую энергию АТФ.

Обобщая описанную выше ситуацию, можно нарисовать простую физическую картину преобразования энергии в живой природе. Энергия солнечного света в растительных организмах затрачивается на принудительный перенос электронов из атомов кислорода, в которых пребывают валентные электроны молекулы воды, на атомы водорода, разрывая тем самым межатомные связи воды и освобождая в итоге нейтральные молекулы кислорода и водорода. То, что водород на самом деле не выделяется в виде газа (хотя некоторые фотосинтезирующие бактерии делают именно это) не меняет дело в принципе. По другим биологическим причинам водород связывается с CO_2 (при этом он переходит в сахар, т. е. нелетучую форму и легко удерживается в организме), но это практически никак не влияет на потенциальную энергию его электронов. Образно говоря, кванты света натягивают пружину, перенося электроны от кислорода на водород. Это энергетически напряжённое состояние неустойчиво и стремится релаксировать обратно (это отчётливо проявляется при взрыве гремучего газа – смеси водорода с кислородом). Но в обычных условиях этот процесс очень затруднён, пружина удерживается «чекой» (сахар может долго пребывать на воздухе без химических изменений). И лишь в живой клетке ферментные комплексы митохондриальной мембраны вытаскивают «чеку», освобождая поток электронов от водорода на кислород, но придают этому процессу направленный характер и переводят избыточную энергию в форму мембранного потенциала. А кислород и водород снова воссоединяются в молекулах воды, этого основного «рабочего тела» живой природы. Энергия этих элементарных актов перемещения электронов ничтожно мала, порядка одного электрон-вольта, но на их сумме держится вся жизнь нашей биосферы.

Однажды на лекции

Теорема о существовании. Какую бы глупость вы ни придумали, найдется человек, который эту глупость сделает.

Это теорема Эммы Нётер. Нётер, как известно, была женщиной.

Чтобы вывести эту формулу, мне достаточно спинного мозга.

Доска является «оперативной памятью» физика-теоретика.

Думать надо было на I и II курсах, на III надо уже знать!

Зачем мне думать о знаке? Я же не студент.

Уж и не знаю, как вы там привыкли рисовать (n-1)-мерную гиперплоскость.

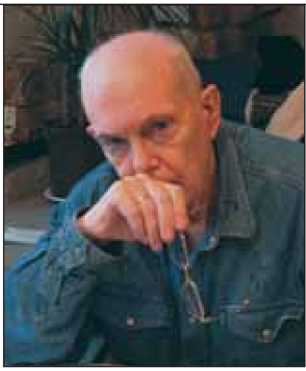
Что я и доказал, с присущим мне остроумием.

Если мы будем задавать что-нибудь совсем по-бестолковому, то это будет ни на что не похоже.

Дайте-ка я покрупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

...Подтасовка - плод деятельности поколения математиков.

Вот уже пять минут я ничего не говорю, а вы все пишете и пишете...



Карлов Николай Васильевич
член-корр. РАН, президент гуманитарного фонда «Петр Великий», ректор МФТИ в 1987-1997 гг.

В этом номере журнала помещена с сокращениями первая глава историко-исследовательского произведения Н.В. Карлова «Повесть древних времён или предыстория Физтеха». Остальные шесть глав будут печататься в следующих номерах журнала.

«Да ведают потомки православных...»
А.С. Пушкин

Введение

В этих заметках делается попытка изложить раннюю историю Московского Физико-Технического Института (МФТИ) на этапе организации Физико-технического факультета (ФТФ) в Московском Государственном Университете (МГУ) имени М.В. Ломоносова.

К тому времени, о котором, в основном, пойдёт речь, в СССР полностью завершилась социальная революция. Культурная революция в Советской России также уже состоялась. На очереди стояла научно-техническая революция. Её необходимость была очевидна. Она неодолимо назревала, властно требуя свершения революции образовательной. Она заняла около двух десятилетий, примерно с 1930 по 1950 годы.

Высшим достижением образовательной революции в СССР явилось создание Московского Физтеха, история которого интересна и поучительна.

Глава первая. Предыстория

...Немногим более двух столетий назад стало ясно, что очевидное исчерпано и что на поверхности вещей и явлений не осталось ничего ценного, ещё не использованного человеком деятельным. Тогда же начало возникать понимание того, что для дальнейшего продвижения вперёд необходимо идти вглубь, что получить новые существенные возможности, найти практически значимые новые решения невозможно без постижения природы вещей и сути явлений. Именно поэтому примерно два столетия насчитывает история современного элитарного инженерного и естественнонаучного образования. Пунктирно легко обозначить основные этапы становления этого элитарного высшего научно-технического образования.

1795-1804 гг.

Сначала термидорианский Конвент Французской Республики заложил основания, а затем первый консул Наполеон Бонапарт завершил создание в Париже знаменитой Политехнической школы, первой в ряду высших учебных заведений нового типа. Наполеон дал школе гордый девиз «Во имя Отечества, Науки и Славы» и декретировал ей высокий государственный статус.

1861 г.

Президент США Линкольн учредил Массачусетский Технологический Институт, основополагающий статут которого предписывал органично сочетать в процессе обучения фундаментальное изучение естественнонаучных, инженерных, социальных дисциплин с практической деятельностью обучаемых и обучающих.

1899 г.

Император Николай II по инициативе министра финансов Российской империи С.Ю. Витте учредил Петербургский Политехнический Институт, явивший собой новый тип высшего технического учебного заведения как по фундаментальности общеинженерного образования, так и по составу факультетов.

1921 г.

Группа крупных финансистов и предпринимателей тихо-океанского побережья США организовала Совет попечителей, провозгласивший учреждение Калифорнийского Технологического Института, «призванного готовить учёных и инженеров творческого типа, проводя основательную подготовку по инженерной и чистой науке, базируя эту подготовку на исключительно глубоком обучении фундаментальным наукам – математике, физике, химии и активизируя деятельность Института щедрым вливанием исследовательского духа».

1946-1951 гг.

Генералиссимус И.В. Сталин по инициативе академика П.Л. Капицы для подготовки инженеров-физиков и научных работников в остро актуальных областях новой техники учредил ФТФ МГУ, а затем на его базе создал МФТИ.

1960 г.

Королева Британии Елизавета II объявила Хартию Основания Черчилль-колледжа в составе Кембриджского университета с достославной целью готовить «продвинутых технологов», нацеленных на усиление конкурентоспособности национальной наукоёмкой промышленности и увеличение удельного веса высоких технологий в ней.

На нашей исторической арене, в России, МФТИ непосредственно предшествовал Санкт-Петербургский, он же Петроградский, Политехнический институт. Рассмотрим это более детально.

19-го февраля 1899-го года Государь Император Николай Александрович высочайше утвердил всеподданнейший доклад Министра финансов империи С.Ю. Витте. В этом докладе Министр в ясной форме аргументировал необходимость организации в Петербурге Политехнического института. Характерно, что доклад этот делал не Министр просвещения, что было бы, казалось, естественным, а Министр финансов, который смог убедить Государя принять по сути своей революционное решение о создании в столице империи высшего технического учебного заведения нового типа.

В России к тому времени сложилась устойчивая система университетского образования. Но университеты не могли готовить инженеров.

«Правильно построенный университет есть самый лучший механизм для научного развития. ... Если университет не живёт свободной наукой, то в таком случае он не достоин звания университета», – совершенно справедливо писал граф Витте. Классический, традиционный университет, по англоязычной терминологии, The comprehensive university, т. е. «университет понимания», в то время был далёк от прямых запросов жизни. Его «свободная» наука, теперь мы бы сказали, его фундаментальная наука, развивалась по своей собственной логике и была закономерно абстрактной.

Это было правильно, это было хорошо, это удовлетворяло присущее человечеству стремление к знанию как к таковому, стремление понять замысел Творца всего сущего. Но инженер должен быть конкретен и жить жизнью производства материально осязаемых благ – машин, конструкций, технологий, товаров и услуг. Хороший инженер должен быть новатором. Но новаторская конкретность инженера только тогда плодотворна, когда она опирается на фундаментальную образованность достаточно общего плана.

Тут вызревало серьёзное противоречие.

Деловые круги России, поддерживаемые, в частности, такими учёными как Д.И. Менделеев, именно графом Витте назначенный Управляющим Палатой мер и весов, стремились ввести в университетах преподавание технических дисциплин. Предлагалось создать в университетах специальные факультеты промышленного образования наподобие медицинского или юридического.

Несомненно, сам факт пребывания в университете в годы формирования личности молодого человека существенно расширит кругозор будущего специалиста, придаст ему общую культурность, сделает его фундаментально образованным, широко мыслящим и всесторонне развитым творцом новой техники, организатором и руководителем производства. Собственно университету, в его традиционной части, это тоже пошло бы на пользу. К сожалению, университетская общественность, начавшая уже к тому времени замыкаться в своём узком кругу университетская профессура, эту идею не восприняли. Министерство просвещения было резко против.

А вместе с тем, такое решение, будь оно принято и реализовано, могло бы существенно изменить историю высшей школы в России. В первой трети XX века, как до революции, так и после неё, у нас в стране сложилось мнение о неактуальности подготовки специалистов с университетским образованием. Они начали становиться социально не востребованными, эти молодые люди с университетскими дипломами. Это с одной стороны.

С другой стороны, в промышленности на фоне первых успехов её становления, достигнутых, правда, в серьёзной мере за счёт заёмного ума иностранных специалистов, стало возникать ощущение потребности лишь в инженерах, подготовленных для узкопрофессиональной деятельности.

Создание инженерных факультетов в составе наших лучших университетов смогло бы в стратегической перспективе реально противодействовать пагубному развитию ремесленнически узкой специализации инженеров. Кстати сказать, пагубность эта в России отчётливо проявилась в 70-80-х годах XX века.

Противоречие между необходимостью широкого образования и потребностью в конкретной специализации могло быть в серьёзной мере разрешено путём создания политехнических институтов. Действительно, такие институты с широким спектром факультетов, гибкая структура которых оперативно откликается на запросы реальной жизни, по самой своей сути функционально эквивалентны университетам. По идее, действительно политехнический институт есть не что иное, как технический университет.

С. Ю. Витте, по ходу своих пространных «Воспоминаний» характеризуя тех или иных успешных государственных или финансово-экономических деятелей своей эпохи, никогда не забывает отметить, если к тому есть основания, университетскую природу культурности фигуранта своих мемуаров. Говоря о себе, он часто подчёркивает, что полученное им строгое и фундаментальное математическое образование существенно помогало ему строить его жизнь.

По поводу Санкт-Петербургского Политехнического Института он пишет:

«Развив сеть коммерческого образования в России, у меня явилась мысль устроить высшие заведения – коммерческие и технические университеты в России – в форме политехнических институтов, которые содержали бы в себе различные отделения человеческих знаний, но имели бы организацию не технических школ, а университетов, т. е. такую организацию, которая наиболее способна была бы развивать молодых людей, давать им общечеловеческие знания вследствие соприкосновения с товарищами, занимающимися различными специальностями».

Не могу не отметить, сильно забегая вперёд, схожесть аргументации графом Витте необходимости создания инженерного вуза нового типа, с той системой доводов, которые почти через полвека развивал П.Л. Капица, аргументируя неизбежность организации Физтеха. Обращает на себя внимание также и, в известном смысле, одинаковый характер тех препятствий, которые городила высшая бюрократия на пути оформления и реализации принимаемого верховной властью решения.

Витте создавал элитный, очень нужный России политехнический институт. Особенно важно было то, что административно этот институт находился вне подчинённости Министерству просвещения, а входил в систему управления Министерства финансов. К сожалению, неизбывное своеобразие России состоит, в частности, и в том, что практически все 200 лет своего существования Министерство просвещения в основном мешало делу просвещения, либо сопротивляясь разумным новациям, либо безоглядно пускаясь в нелепые, но глобальные реформы.

От личности руководителя зависит очень многое, как и от вовремя сказанного мудрого слова. Особенно в том традиционном сообществе людей, которое объединяет Россия. Известен такой эпизод. Во время победоносной русско-турецкой войны 1877-1878 годов тогдашний Министр народного просвещения граф Д. А. Толстой из патриотических видов предложил урезать смету своего министерства – война, де мол, надо экономить; пусть больше казённых денег идёт в военный бюджет. Ему резко возразил военный Министр генерал-фельдмаршал граф Д.А. Милютин, идеолог и организатор великолепной военной реформы 1860-1870 годов, заявив, что как военный Министр он чувствует нужду в распространении знаний и что для военных знания – это первейшее дело. Смета Минпроса была сохранена.

Не могу не прибавить, что современник Милютина, князь Бисмарк примерно в то самое время, но по другому, хотя и близкому поводу заявил, что империю (германскую) создал и войну (с Францией) выиграл прусский народный учитель.

Что уж тут говорить о той редкой, но вожделённо прекрасной ситуации, в которой Министерство финансов преодолевает противодействие Министерства просвещения, создавая не только финансово-экономические, но и передовые инженерные вузы!

Далее Витте подчёркивает, что, хотя Министру финансов «было, конечно, легче, чем другим Министрам, иметь средства на устройство этого института», он «встречал затруднения в организации и устройстве этого института не только в смысле денежных затрат». Кроме прочих, он встречал затруднения и политические:

«Мне указывали, что я устраиваю такое заведение, которое впоследствии может внести смуту; говорили: разве мало у нас университетов, и с университетскими студентами мы не можем справиться, постоянные беспорядки, а тут Витте под носом желает устроить ещё новый громаднейший университет, который будет новым источником всяких беспорядков».

В этой связи возник важный вопрос о том, кого назначить директором нового института, который не может не пользоваться всеобщим уважением и, имея определенный «ценз знаний, остаётся весьма склонным по своей натуре к учёным техническим исследованиям».

Задача, скажем прямо, трудная. Витте с ней справился. По его представлению Государь утвердил в должности директора Политехнического института князя Гагарина.

Для студентов и профессоров института, для всей постановки дела в институте было важно, что его первый директор, князь Андрей Григорьевич Гагарин был выдающимся учёным, инженером-исследователем и пользовался всеобщим уважением. Когда в Институте было применено выборное начало, он сохранил пост директора, будучи избран единогласно.

Надо сказать, что учёный мир поддержал Министра финансов. В составлении Устава Института, определении состава его факультетов, выработке учебного плана, наблюдении за строительством участвовали наиболее яркие представители инженерной и научной мысли Петербурга, специалисты по наукам позитивного толка. В их число входили такие крупные люди как почётный член Санкт-Петербургской Академии наук, военный инженер и член Государственного совета, генерал Н.П. Петров, наш великий металлург Д.К. Чернов и кораблестроитель, математик, и механик, «ординарный» академик А.Н. Крылов.

Здесь нельзя не сказать, что вот уж кто был не одинарен в истории нашей Академии, так это её «ординарный сочлен» Алексей Николаевич Крылов! Достаточно сослаться на его «Воспоминания», неоднократно, с разной мерой цензурных купюр, издававшиеся при советской власти.

Состав факультетов (Отделений) Института чётко отражал области профессиональных интересов вышеупомянутых персон, к коим следует добавить и самого Витте. Эти факультеты суть коммерческий, кораблестроительный, металлургический и электромеханический. Надо ли специально подчёркивать, что именно эти факультеты были организованы не потому, что таков был набор специализаций этих людей. Наоборот, именно эти люди были призваны под знамёна создания вуза нового типа потому, что их специальности были остро востребованы временем.

Гагарин предложил Крылову стать деканом кораблестроительного факультета, но тот отказался, хотя и активно работал в учебной комиссии генерала Петрова, принимая «деятельное участие в разработке учебных планов и программ, особенно по математике и теоретической механике».

Сопоставление данных «Воспоминаний» Витте и Крылова лишний раз подчёркивает ту простую мысль, что к самому началу прошлого века необходимость создания в России инженерного высшего учебного заведения нового типа ясно понималась как передовыми учёными, работавшими в интересах обороны страны, так и мудрыми государственными деятелями.

Учреждённый в 1899 году институт реально открылся в 1902 году. Совпало так, что 29 мая 1902 года статс-секретарь С.Ю. Витте подготовил для Государя «Справку по вопросу об улучшении способов передвижения населения в С.-Петербурге и Москве», где в числе других вопросов весьма квалифицированно обсуждается вопрос о переводе городских железных дорог на электрическую тягу. Совпадение по времени, несомненно, случайно, но актуальность создания электромеханического факультета в политехническом институте сей факт оттеняет красноречиво.

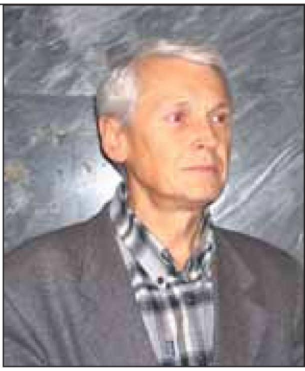
Замечу, что свой рассказ об организации инженерного вуза нового типа Витте заключает абзацем: «Кроме С.-Петербургского политехнического института, в то время, когда я был министром финансов, приблизительно по тому же принципу мне удалось основать ещё два политехнических института: один в Варшаве, а другой в Киеве».

Выше подробно, в деталях и с множеством цитат рассказана история учреждения более ста лет назад в Санкт-Петербурге Политехнического института. Это сделано не только потому, что в этом институте были сформулированы и развиты основы идеи Физтеха, но и потому, что она, эта история, до боли в сердце напоминает историю возникновения МФТИ.

Более чем через десять лет после вынужденной отставки графа Витте от всех его государственных должностей, в разгар первой мировой войны наиболее дальновидным представителям правящей элиты стало ясным, что без коренной реформы высшего инженерного образования Россия неизбежно выпадает из числа великих держав. В 1916-м году по существу последний царский Министр народного просвещения, назначенный на этот пост в мае 1915-го года и высочайше отправленный в отставку 28-го декабря 1916-го года за два месяца до отставки самого Государя, граф П.Н. Игнатьев направил царю всеподданнейший доклад. В этом докладе Министр, аргументируя необходимость коренного преобразования инженерного образования, подчёркивал, что вся техника, все прикладные науки, все конкретные производительные профессии покоятся на чистой науке, разрабатываемой в университетах. Он совершенно справедливо утверждал, что развитие образования в технике немыслимо без создания и укрепления высших технических учебных заведений университетского типа. Воспринят положительно этот доклад последним российским императором не был. Негодование правых кругов Государственной Думы, гнев «Союза русского народа» , неприятие идей Министра чиновниками центрального аппарата Министерства народного просвещения в единодушном порыве слились с волей Монарха. Министр был уволен.

Такова предыстория появления на свет Божий Московского Физтеха, начала истории которого просматриваются во времена, непосредственно следующие за великой и страшной революцией 1917 года.

(продолжение следует)



Чивилёв Виктор Иванович
к.ф.-м.н., доцент кафедры общей физики МФТИ, заслуженный работник высшей школы, заместитель председателя научно-методического совета ЗФТШ при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Колебания

В статье дан общий подход к колебаниям различной физической природы. Вначале вводятся и уточняются понятия *колебание, периодическое колебание, гармоническое колебание*. Затем приводится алгоритм (правило) для доказательства гармоничности и нахождения периода колебаний, имеющих различную физическую природу. На примерах конкретных систем продемонстрировано применение алгоритма.

Для понимания излагаемого материала необходима некоторая математическая культура: знание свойств функций $y(x)=\alpha\sin(\omega x+\varphi)$ и $y(x)=\alpha\cos(\omega x+\varphi)$ и умение дифференцировать сложную функцию, в частности знать, что для функции $y(x)$ справедливо $(y^2)'=2yy'$. Статья подготовлена на базе задания № 4 для 11-х классов ЗФТШ при МФТИ.

§1. Колебательные процессы

Колебаниями называются процессы, в той или иной степени, повторяющиеся во времени.

Когда говорят, что система колеблется, то под этим подразумевается, что некоторая физическая величина, характеризующая систему, совершает колебания, т. е. изменяется, неоднократно принимая одно и то же значение. При колебаниях математического маятника (рис. 1) колеблющимися физическими величинами будут угол α отклонения нити от вертикали, координаты маятника x и y, расстояние вдоль траектории (по дуге окружности) от т. A до т. O и т. д. Когда верхушка дерева качается под действием ветра, то колеблются координаты верхушки. При распространении звука в воздухе колеблется давление и плотность воздуха в каждой точке воздушной среды. При дыхании человека колеблющейся физической величиной может служить объём грудной клетки. В колебательном контуре совершают колебания заряд конденсатора, напряжение на конденсаторе, ток в контуре и т. д. Напряжение на горящей лампочке в квартире и ток через неё тоже колеблются. Такие физические величины, как давление и температура, характеризующие состояние атмосферы, в течение, скажем, месяца, неоднократно принимают одни и те же значения, т. е. совершают колебания.

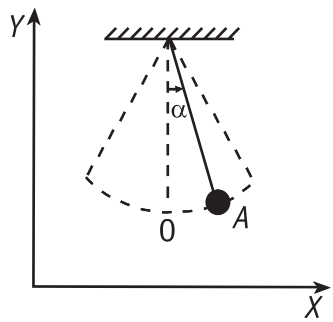


Рис.1

Колебательные процессы встречаются в разнообразных физических явлениях и широко распространены в окружающем нас мире. Несмотря на то, что колебания могут иметь различную физическую природу, они часто подчиняются одним и тем же закономерностям, описываются одинаковыми математическими формулами и уравнениями. Это позволяет с единой точки зрения математически описать отличающиеся по физической природе колебания.

§2. Периодические колебания

Из множества колебаний выделим и рассмотрим *периодические колебания*.

Колебания некоторой физической величины S называются периодическими, если все значения этой величины полностью повторяются через одно и то же время T, называемое *периодом*, т. е. $S(t+T)=S(t)$ для любого значения времени t. Если T – период, то $2T$, $3T$, $4T$, ... тоже периоды. Поэтому в физике под периодом обычно понимают наименьший период, т. е. наименьший положительный отрезок времени, через который физическая величина S повторяется. При этом говорят, что за время одного периода совершается одно колебание.

Частотой периодических колебаний ν называется число колебаний в единицу времени. Легко показать, что

$$\boxed{\nu=\frac{1}{T}.}$$

Действительно, если за время t совершено N колебаний, то частота $\nu=\frac{N}{t}$, а период $T=\frac{t}{N}$. Отсюда видно, что $\nu=\frac{1}{T}$. В системе СИ единицей измерения частоты служит *Герц* (*Гц*), 1 *Гц* $=c^{-1}$.

Пусть периодически колеблющаяся величина S изменяется в пределах от S_0-A до S_0+A, где $A>0$. Тогда говорят, что величина S колеблется с *амплитудой* A около значения S_0.

§3. Гармонические колебания

Важным частным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания*, т. е. такие изменения во времени t физической величины S, которые идут по закону

$$S(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (1)$$

где $A>0$, $\omega>0$. Из курса математики известно, что функция вида (1) изменяется в пределах от $-A$ до A, и что наименьший положительный период у неё $\frac{2\pi}{\omega}$. Поэтому гармоническое колебание вида (1) происходит с амплитудой A и периодом

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}.}$$

Не следует путать *циклическую (круговую) частоту* ω и частоту ν колебаний. Между ними простая связь. Так как $\omega=\frac{2\pi}{T}$ и $\nu=\frac{1}{T}$, то $\boxed{\omega=2\pi\nu.}$

В системе СИ размерность как ω, так и ν равна c^{-1}. Наименование *Гц* обычно применяется только для величины ν, а если необходимо указать размерность ω, то пишут просто c^{-1}.

Величина $\omega t+\varphi_0$ называется *фазой колебаний*. При $t=0$ фаза равна φ_0, и поэтому φ_0 называется *начальной фазой*. Начальная фаза для конкретного колебания с некоторой амплитудой (например, колебания координаты груза, подвешенного на пружине) зависит от момента начала отсчёта времени (момента включения секундомера).

Отметим, что при любом t справедливо $A\cos(\omega t+\varphi_0)=A\cos[\omega t+(\varphi_0+2\pi n)]$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Видно, что начальная фаза для одного и того же колебания есть величина, определённая с точностью до $2\pi n$. Поэтому из множества возможных значений начальной фазы выбирают обычно значение начальной фазы наименьшее по модулю или наименьшее положительное. Но делать это не обязательно. Например, если дано колебание $S=A\cos(\omega t+\frac{13}{6}\pi)$, то удобнее записать его в виде $S=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{6})$ и работать в дальнейшем с последним видом записи этого колебания.

Можно показать, что колебания вида

$$S=a\sin(\gamma t+\alpha_0) \quad \text{и} \quad S=a\cos(\gamma t+\alpha_0), \qquad (2)$$

где a и γ могут быть любого знака, с помощью простых тригонометрических преобразований всегда приводятся к виду (1), причём $A=|a|$, $\omega=|\gamma|$, а φ_0 не равно α_0 вообще говоря. Таким образом, колебания вида

(2) являются гармоническими, с амплитудой $|a|$ и циклической частотой $|\gamma|$. Не приводя общего доказательства, проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пусть требуется показать, что колебание $S=-16\sin(20\pi t-\frac{\pi}{3})$ будет гармоническим и найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T и начальную фазу φ_0 (одно из возможных значений φ_0).

Действительно,

$$S=-16\sin(20\pi t-\frac{\pi}{3})=16\sin(\frac{\pi}{3}-20\pi t)=$$

$$=16\cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-20\pi t))=16\cos(20\pi t+\frac{\pi}{6}).$$

Видим, что колебание величины S удалось записать в форме (1). При этом $A=16$, $\omega=20\pi$, $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{10}$, $\varphi_0=+\frac{\pi}{6}$.

Попробуйте самостоятельно убедиться, что $x=-23\cos(\frac{\pi}{10}-4t)=23\cos(4t+\frac{9\pi}{10})$, $S=7\sin(9t-\frac{\pi}{3})=7\cos(9t-\frac{5\pi}{6})$.

Естественно, что запись гармонических колебаний в форме (2) ничем не хуже записи в форме (1), и переходить в конкретной задаче от записи в одной форме к записи в другой обычно нет необходимости. Нужно только уметь сразу находить амплитуду, циклическую частоту и период, имея перед собой любую форму записи гармонического колебания.

Эквивалентностью записи гармонического колебания через косинус или синус объясняется то, что в одних учебниках дается определение гармонических колебаний через косинус, а в других – через синус.

§4. Производные по времени от колеблющейся величины

Иногда полезно знать характер изменения первой и второй производных по времени от величины S, которая совершает гармонические колебания (колебания по гармоническому закону) с амплитудой A и циклической частотой ω. Если $S=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, то дифференцирование S по времени t даёт $S'=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$, $S''=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Видим, что первая и вторая производные по времени t колеблющейся величины S изменяются по гармоническому закону с той же циклической частотой ω и амплитудами $A\omega$ и $A\omega^2$.

Пример. Пусть координата x тела, совершающего гармонические колебания вдоль оси X, изменяется по закону $x=2\sin 6t$, где x – в сантиметрах, время t – в секундах. Требуется записать закон изменения скорости и ускорения тела и найти их максимальные значения.

Для ответа на поставленный вопрос заметим, что первая производная по времени от величины x есть проекция скорости тела на ось X, а вторая производная от x есть проекция ускорения на ось X: $x'=\upsilon_x$, $x''=a_x$. Продифференцировав выражения для x по времени, получаем: $x'=\upsilon_x=12\cos 6t$, $x''=a_x=-72\sin 6t$. Максимальные значения скорости и ускорения $\upsilon_{\max}=12\ см/с$, $a_{\max}=72\ см/с^2$.

§5. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний
Алгоритм нахождения периода гармонических колебаний

Пусть некоторая физическая величина S совершает гармонические колебания:

$$S(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0). \qquad (3)$$

Легко показать, что вторая производная от S по времени t равна $S''=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$. С учётом (3) получаем, что $S''=-\omega^2 S$, т. е. $\boxed{S''+\omega^2 S=0.}$ (4)

Итак, можно сделать вывод: если величина S изменяется по гармоническому закону (3), то отсюда следует справедливость равенства (4). В математике показывается и обратное: если для величины $S=S(t)$ справедливо равенство (4) при всех допустимых значениях t, то $S(t)$ имеет только вид (3) и никакой другой. Причем A и φ_0 в (3) есть произвольные постоянные, конкретные значения которых зависят от так называемых начальных условий, т. е. от значений S и её производной S' в некоторый момент времени t (обычно при $t=0$).

Равенства, связывающие функцию, её аргумент и производные функции по этому аргументу, называются в математике дифференциальными уравнениями. Поэтому равенство (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Таким образом, мы получили чрезвычайно важное как для теории, так и для решения задач следующее утверждение.

Если с помощью законов физики для физической величины S удалось записать дифференциальное уравнение вида $S''+\omega^2 S=0$, то отсюда будет следовать, что S изменяется обязательно по гармоническому закону $S(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ с циклической частотой ω ($\omega=\sqrt{\omega^2}>0$). Конкретные значения амплитуды A и начальной фазы φ_0 зависят от начальных условий.

Это утверждение может служить *алгоритмом* (правилом) для доказательства гармоничности колебаний и нахождения периода колебаний любых конкретных колебательных систем. Алгоритм можно применять к колебаниям различной физической природы.

Ниже на примерах, представленных в виде задач, показано применение алгоритма.

§6. Пружинный маятник

Задача 1. На гладком горизонтальном столе груз массой m совершает колебания вдоль оси X на лёгкой пружине жёсткостью k, прикрепленной одним концом к грузу, а другим к стене (рис. 2). Показать, что свободные колебания такого пружинного маятника гармонические и найти их период. (*Свободными колебаниями* называются колебания, которые возникают в системе в результате однократного выведения её из состояния устойчивого равновесия).

РЕШЕНИЕ. Начало координат ($x=0$) поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза. За колеблющуюся физическую величину возьмем координату x груза.

1-й способ решения. Используется второй закон Ньютона.

Пусть груз при колебаниях в некоторый момент времени t имеет координату $x=x(t)$. Тогда проекция на ось x силы $\vec{F}$, действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x=-kx \qquad (5)$$

при любом знаке x, что легко проверить.

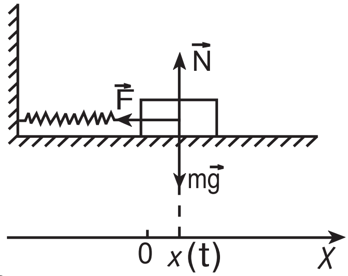


Рис.2

На рис. 2 показано направление силы $\vec{F}$ при $x>0$. На груз ещё действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны стола. По второму закону Ньютона $m\vec{a}=\vec{F}+m\vec{g}+\vec{N}$, где $\vec{a}$ – ускорение груза.

Это векторное равенство, записанное в проекциях на ось X, имеет вид $ma_x=F_x$. Здесь $a_x=x''$ – проекция на ось X ускорения. Учитывая (5), имеем $mx''=-kx$. Отсюда $x''+\dfrac{k}{m}x=0$.

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и периодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.

В момент, когда груз имеет координату x и проекцию на ось X скорости x', кинетическая энергия груза будет $\dfrac{1}{2}m(x')^2$, а потенциальная энергия деформированной пружины $\dfrac{1}{2}kx^2$. Так как полная энергия системы при колебаниях сохраняется, то $\frac{m(x')^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const$. Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{1}{2}m\cdot 2x'x''+\frac{1}{2}k\cdot 2xx'=0.$$

Откуда $x''+\frac{k}{m}x=0$.

Как и в первом способе решения, но уже другим путём, мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Задача 2. На лёгкой пружине жёсткостью k подвешен груз массой m. Показать, что вертикальные собственные колебания такого пружинного маятника гармонические и найти их период. (*Собственные колебания* – это свободные колебания без затухания, т. е. колебания, когда нет сил (причин), препятствующих свободным колебаниям).

РЕШЕНИЕ. Направим ось X вниз (рис. 3), начало координат поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза. В этом положении пружина растянута по сравнению с ненапряжённым состоянием на величину x_0, причём

$$\boxed{kx_0=mg}. \quad (6)$$

1-й способ решения. Используется второй закон Ньютона.

Если текущая координата $x=x(t)$, то проекция на ось X силы $\vec{F}$, действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x=-k(x_0+x). \quad (7)$$

Равенство (7) справедливо для любого значения координаты x колеблющегося груза, что, вообще говоря, нужно проверить, т. к. мы хотим получить дифференциальное уравнение колебаний, справедливое не только для одного значения x, а для всех значений.

Запишем уравнение движения груза (уравнение второго закона Ньютона) в проекциях на ось X, учитывая, что проекция на ось X ускорения груза есть вторая производная x'' от координаты по времени:

$$mx''=F_x+mg. \quad (8)$$

С учётом (6) и (7) уравнение (8) принимает вид:

$$x''+\frac{k}{m}x=0. \quad (9)$$

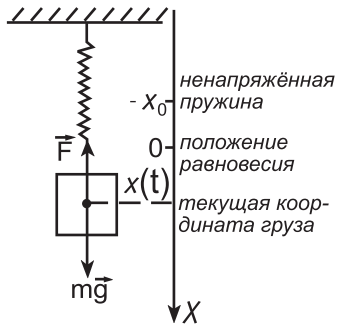


Рис.3

Видно, что это дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых:

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}. \quad (10)$$

2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.

За нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле тяжести удобно взять положение равновесия. Полная механическая энергия колебаний системы представляет собой сумму кинетической энергии груза $\frac{1}{2}m(x')^2$, потенциальной энергии груза в поле тяжести $mg(-x)=-mgx$ и потенциальной энергии деформации пружины $\frac{1}{2}k(x_0+x)^2$. Здесь x' – проекция скорости груза на ось X, её квадрат равен, естественно, квадрату модуля скорости.

Полная механическая энергия при колебаниях должна сохраняться:

$$\frac{m(x')^2}{2}+\frac{k(x_0+x)^2}{2}-mgx=const. \quad (11)$$

Дифференцируем (11) по времени:

$$mx'x''+k(x_0+x)x'-mgx'=0.$$

С учётом (6) после простых преобразований получаем $x''+\frac{k}{m}x=0$, что совпадает с (9). Итак, колебания гармонические с периодом, даваемым (10).

Проанализировав ответы к задачам 1 и 2, приходим к выводу: *собственные колебания пружинного маятника гармонические с периодом*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}.$$

При этом груз маятника может скользить по гладкому столу или быть подвешенным на пружине.

§7. Математический маятник

Задача 3. Показать, что в однородном поле тяжести собственные малые колебания в вертикальной плоскости математического маятника длиной l являются гармоническими и найти их период.

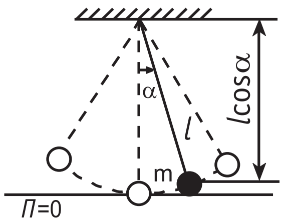


Рис.4

РЕШЕНИЕ. Пусть у маятника длина нити l и масса шарика m. За колеблющуюся физическую величину удобно взять угол α отклонения нити от вертикали (рис. 4). Будем считать α положительным, если маятник отклонён вправо от положения равновесия, и отрицательным, если он отклонён влево. Выразим кинетическую и потенциальную энергии шарика массой m в произвольный момент времени t через угол $\alpha = \alpha(t)$ и производную угла по времени $\alpha' = \alpha'(t)$. Угловая скорость шарика α', его линейная скорость $v = \alpha' l$ и кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2.$$

Если за нулевой уровень потенциальной энергии ($П = 0$) взять уровень, соответствующий нахождению шарика в положении равновесия маятника, то потенциальная энергия шарика в момент отклонения нити на угол α окажется $П = mg(l - l\cos\alpha)$. Поскольку $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то $П = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Для малых углов можно считать, что значения их синусов приблизительно равны самим углам (в радианах). Поэтому $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ и можно принять, что

$$П = 2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mgl\alpha^2.$$

Полная энергия системы, равная $K + П$, при колебаниях сохраняется. Следовательно

$$\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2 + \frac{1}{2}mgl\alpha^2 = const.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{1}{2}ml^2 2\alpha'\alpha'' + \frac{1}{2}mgl2\alpha\alpha' = 0.$$

После упрощения имеем: $\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0$.

Нами получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины α с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ и периодом $T = 2\pi/\omega$.

Итак, *малые колебания математического маятника являются гармоническими с периодом* $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}.$

§8. Колебательный контур

Задача 4. Дан колебательный контур без затухания (сопротивление равно нулю) с постоянными ёмкостью C и индуктивностью L. Показать, что свободные электрические колебания в контуре гармонические и найти их период. (Напомним, что свободные колебания без затухания называются собственными колебаниями).

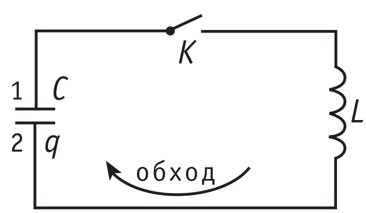


Рис.5

РЕШЕНИЕ. Если зарядить конденсатор и затем замкнуть ключ, то в схеме на рис. 5 возникнут колебания заряда на конденсаторе, колебания тока в цепи, колебания э.д.с. самоиндукции в катушке и т. д. За колеблющуюся величину удобно взять заряд на одной из обкладок конденсатора.

<u>1-й способ решения. Используем закон Ома.</u>

Выберем положительное направление обхода контура, например по часовой стрелке, как показано на рис. 5. Это означает, что ток I положителен, если его направление совпадает с положительным направлением обхода, и отрицателен, если не совпадает. Аналогичное можно сказать и про знак э. д. с. самоиндукции 1, при расчёте которой по формуле $1 = -LI'$ автоматически будет получаться знак у э.д.с., согласованный с направлением обхода.

Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$ (для другой обкладки $q' = -I$, что не очень удобно). Это легко сделать, если учесть, что $q' = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$. Для схемы на рис. 5 q следует взять на нижней обкладке.

По закону Ома для участка $1 - L - 2$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + 1 = IR.$$

Поскольку сопротивление в контуре

$$R = 0,\ \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C},$$

$$1 = -LI' = -L(q')' = -Lq'',$$ то имеем:

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad (12)$$

Итак, получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины q с циклической частотой $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Полезно заметить, что при изменении заряда по гармоническому закону $q = q_0\cos(\omega t + \varphi_0)$ ток

$$I = q' = -q_0\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = q_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

э.д.с. самоиндукции

$1 = -LI' = Lq\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$ и напряжение на конденсаторе $U = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_0}{C}\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Таким образом, *заряд на конденсаторе, ток в контуре, э. д. с. самоиндукции в катушке и напряжение на конденсаторе совершают гармонические колебания с периодом*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}.}$$

При этом q, 1,?U колеблются в фазе, *а* колебания тока опережают колебания заряда по фазе на $\pi/2$.

<u>2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.</u>

Выберем положительное направление обхода контура и обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$. По закону сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = const.$$

Продифференцируем это равенство по времени: $LII' + \dfrac{1}{C}qq' = 0$. Учитывая, что $I = q'$, а $I' = (q')' = q''$, получим $q'' + \dfrac{1}{LC}q = 0$.

Последнее уравнение совпало, что и следовало ожидать, с уравнением (12), и дальнейшие рассуждения те же, что и в первом способе решения.

§9. Движение тела в гипотетическом тоннеле вдоль диаметра Земли

Задача 5. Вообразите, что вдоль диаметра Земли прорыт тоннель и в него сброшен камень. Через какое время камень окажется на противоположной стороне Земли?

Сопротивление воздуха и вращение Земли не учитывать. Плотность Земли считать постоянной по всему объёму, радиус Земли $R = 6400$ км.

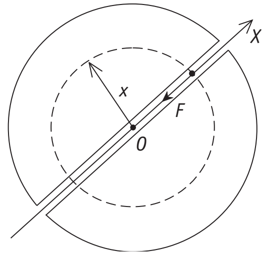


Рис.6

РЕШЕНИЕ. Направим ось X вдоль тоннеля и поместим начало координат в центр Земли (рис. 6). Пусть в произвольный момент времени координата камня x. Разобьём мысленно весь объём Земли на тонкие сферические слои с центром в точке O. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что любой слой с радиусом больше x действовать на камень не будет, а слои с радиусом меньше x будут действовать с силой F, равной силе притяжения между шаром радиусом x и камнем. Если плотность Земли ρ, то масса такого шара равна $M = 4\pi x^3 \rho / 3$ и по закону всемирного тяготения

$$F = G\frac{Mm}{x^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho m x,$$

где m – масса камня, G – гравитационная постоянная. Для любого тела массой m_0 на поверхности Земли можно записать

$$m_0 g = G\frac{m_0(4\pi\rho R^3/3)}{R^2},$$

откуда $$g = \frac{4}{3}G\pi\rho R.$$

Тогда $$F = \frac{mg}{R}x.$$

Запишем уравнение движения камня в проекциях на ось X:

$$mx'' = -F.$$

Подставив сюда выражение для F и упростив, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний для координаты x камня:

$$x'' + \frac{g}{R}x = 0.$$

Отсюда следует, что камень в тоннеле будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

и достигнет противоположной стороны Земли через время

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42 \text{ мин}.$$

§10. Конструкция из математического маятника и пружины

Задача 6. На лёгком стержне длиной l висит небольшой шарик массой m (рис. 7). К стержню прикреплена лёгкая пружина жёсткостью k на расстоянии $2l/3$ от точки o подвеса. Другой конец пружины прикреплён к стене. Система может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O. В положении равновесия стержень вертикален, пружина горизонтальна, и не деформирована. Найдите период малых колебаний системы в плоскости чертежа.

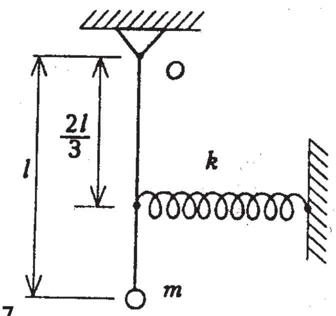


Рис.7

РЕШЕНИЕ. За колеблющуюся физическую величину возьмём угол α отклонения стержня от вертикали (рис. 8). Выразим кинетическую и потенциальную энергии системы в произвольный момент времени t через угол $\alpha = \alpha(t)$ (будем считать его малым) и производную угла по времени $\alpha' = \alpha'(t)$.

Линейная скорость шарика равна $\alpha'(t)\,l$, кинетическая энергия –

$$E_k = \frac{ml^2(\alpha')^2}{2}.$$

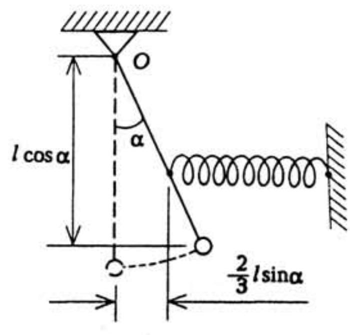


Рис.8

За нулевой уровень потенциальной энергии шарика возьмём уровень, соответствующий положению равновесия шарика. Тогда потенциальная энергия шарика в поле тяжести будет

$$E_{p1} = mg(l - l\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{mgl\alpha^2}{2}.$$

Здесь воспользовались тем, что при малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$.

При отклонении маятника длина пружины сократится на $x = (2l \sin\alpha)/3 = 2l\alpha/3$ и её потенциальная энергия станет

$$E_{p2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{2kl^2\alpha^2}{9}.$$

Полная энергия системы, равная $E_k + E_{p_1} + E_{p_2}$, при колебаниях сохраняется:

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} + \frac{2kl^2\alpha^2}{9} = const.$$

Продифференцируем это равенство по времени:

$$ml^2\alpha'\alpha'' + mgl\alpha\alpha' + 4\frac{kl^2\alpha\alpha'}{9} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{4}{9}\frac{k}{m}\right)\alpha = 0.$$

Видим, что получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{g}{l} + \frac{4}{9}\frac{k}{m}}}.$$

§11. Колебания жидкости в изогнутой трубке

Задача 7. Тонкая изогнутая трубка постоянного сечения расположена в вертикальной плоскости (рис.9). Каждое колено трубки наклонено к горизонту под углом α. Длина части трубки, занятой жидкостью, равна l. Найдите период колебаний жидкости в трубке. При колебаниях опускающаяся поверхность жидкости не достигает изогнутого участка трубки. Трение между слоями жидкости и жидкости о трубку не учитывать.

РЕШЕНИЕ. За колеблющуюся физическую величину возьмём координату x поверхности жидкости в левом колене, направив ось X вдоль колена и поместив начало координат в равновесное положение поверхности жидкости в этом колене (см. рис.9). Пусть масса единицы длины жидкости в трубке ρ. Тогда масса всей жидкости ρl. При колебаниях скорость жидкости равна производной x' от координаты x по времени. Кинетическая энергия всей жидкости равна

$$E_k = \frac{\rho l(x')^2}{2}.$$

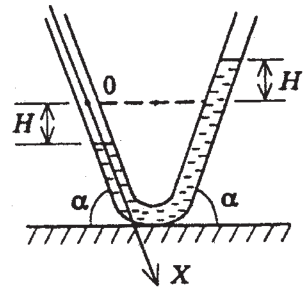


Рис.9

Теперь выразим потенциальную энергию жидкости через координату x. Если в *левом* колене уровень жидкости сместился вдоль трубки на x вниз, то по вертикали он опустился на $H = x\sin\alpha$ в левом колене и поднялся на H в правом. Это эквивалентно тому, что жидкость массой ρx была перенесена из левого колена в правое, поднявшись на высоту H. Потенциальную энергию жидкости в положении равновесия примем за нуль.

Тогда $\quad E_p = \rho xgH = \rho gx^2\sin\alpha.$

Полная энергия жидкости $E_k + E_p$ при колебаниях сохраняется:

$$\frac{\rho l(x')^2}{2} + \rho gx^2\sin\alpha = const.$$

Дифференцируем уравнение по времени:

$$\rho lx'x'' + 2\rho gxx'\sin\alpha = 0.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний для величины *x:*

$$x'' + \frac{2g\sin\alpha}{l}x = 0.$$

Итак, колебания жидкости в трубке гармонические с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\sin\alpha}}.$$

Колесникова Софья Ильинична
старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ. Окончила МГУ, имеет большой опыт работы со старшеклассниками, автор книг «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Избранные вопросы алгебры».

Иррациональные уравнения

Публикуемый материал является дополнением к заданию ЗФТШ №1 для 10 класса. В нём рассматривается два типа иррациональных уравнений: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ и $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Уравнения типа $\sqrt{f(x)}=g(x)$ рассматриваются для того, чтобы ещё раз обратить Ваше внимание на то, что при решении таких уравнений нет необходимости находить их ОДЗ, тогда как неотрицательность правой части уравнений проверять нужно обязательно.
Кроме того, рассматриваются различные способы решения простейшего вида этих уравнений: $\sqrt{ax+b}=cx+d$. Показывается аналитически и графически, откуда берутся посторонние («лишние») корни.

Для уравнений второго типа $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ показывается, что при их решении нет необходимости решать систему неравенств (ОДЗ) $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \end{cases}$ а достаточно подставить найденные корни уравнения $f(x)=g(x)$ в одно из них.

Приведённые маленькие замечания позволяют сократить время на решение таких стандартных задач, а потому дают возможность успешнее справляться с задачами на контрольных и выпускных экзаменах в школе, вступительных экзаменах в вуз, при решении заданий ЕГЭ любого уровня.
Материал рекомендуется учащимся, начиная с 9 класса.

§1. Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

При решении уравнения этого вида очень многие школьники прежде всего находят ОДЗ: $f(x)\geq 0$, затем решают получившееся квадратное уравнение, проверяют, после нахождения решений, условие $f(x)\geq 0$ и успокаиваются. Ответ может оказаться неверным. Почему? Потому что могут появиться «лишние» корни. Почему? Потому что после возведения в квадрат решаются сразу два уравнения: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ и $\sqrt{f(x)}=-g(x)$, но на разных промежутках числовой оси: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ – там, где $g(x)\geq 0$, и $\sqrt{f(x)}=-g(x)$ – там, где $g(x)\leq 0$. «Лишние» корни – это корни второго уравнения, геометрически это пересечение графика функции $y=g(x)$ с графиком функции $y=-\sqrt{f(x)}$.

Как быть?
Дело в том, что обе части **любого** уравнения всегда можно возвести в квадрат, но при этом может получиться неравносильное уравнение, а, значит, могут появиться посторонние корни. В нашем случае получится

уравнение $f(x)=g^2(x)$, при этом очень важно, что ОДЗ уравнения выполняется **автоматически** - поэтому при таком способе решения **не надо** тратить энергию на решение неравенства $f(x)\ge 0$!

Заметим, что уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ может иметь решение для $g(x)\ge 0$, но не имеет решений, если $g(x)<0$.

Вспомним, что, если $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$, то $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$.

Так как уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ может иметь решение лишь при условии $g(x)\ge 0$ (т. е. обе части в ОДЗ уравнения неотрицательны), то

$$\boxed{\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\qquad (1)}$$

Это очень важное условие равносильности. Во-первых, оно освобождает учащегося от необходимости исследовать, а после нахождения решений и проверять условие $f(x)\ge 0$ – неотрицательности подкоренного выражения, т. к. это условие выполняется автоматически.

Во-вторых, акцентирует внимание на проверке условия $g(x)\ge 0$ – **неотрицательности правой** части – это условие «отсекает» посторонние корни – корни уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$. При этом сначала решается уравнение, а затем найденные корни подставляются в неравенство. Неравенство (за редким исключением, когда корни «плохие») заранее решать не надо.

Наше условие равносильности особенно полезно при решении **тригонометрических** уравнений, в которых нахождение ОДЗ связано с решением тригонометрических неравенств, что гораздо сложнее, чем решение тригонометрических уравнений. Проверку в тригонометрических уравнениях даже условия $g(x)\ge 0$ не всегда просто сделать.

Замечание. При решении любых уравнений, где есть хотя бы один неравносильный переход, надо делать проверку, подставляя найденные корни в исходное уравнение!

Пример 1. $\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1$.

△ В этом примере особенно хорошо видно, что важным при решении является условие $x+1\ge 0$, а ОДЗ корня искать не надо, да и найти трудно.

$$\sqrt{2x^3+2x^2-3x+3}=x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2x^3+2x^2-3x+3=x^2+2x+1.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2x^3+x^2-5x+2=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0,\\ (x-1)(x+2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0.\end{cases}$$

Сумма коэффициентов уравнения $2x^3+x^2-5x+2=0$ равна 0, значит, $x = 1$ является корнем. Теперь можно выделить множитель $(x - 1)$ делением углом, при помощи схемы Горнера или группировкой, выделяя последовательно слагаемые, которые делятся на $(x - 1)$.

$$2(x^3-1)+(x^2-1)-5(x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2(x^2+x+1)+x+1-5)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2x^2+3x-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}1,\\ \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Любопытно, что $x=-2$ принадлежит ОДЗ корня (–16+8+6+3>0), но не является решением, т. к. для него не выполнено условие $x+1\ge 0$.

Ответ. 0,5;1. ▲

Пример 2. Решите уравнение

$$4\sqrt{5x-x^2-6}=x-1.$$

△ $4\sqrt{5x-x^2-6}=x-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16\left(5x-x^2-6\right)=(x-1)^2,\\ x-1\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}17x^2-82x+97=0,\\ x\ge 1.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{41\pm\sqrt{212}}{17}.$$

Ответ. $\dfrac{41\pm\sqrt{212}}{17}$. ▲

В этом примере не оказалось лишних корней.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x^3-5x+13}=x+2$.

$\triangle$ $\sqrt{x^3-5x+13}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0, \\ x^3-5x+13=(x+2)^2. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-9x+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ (x-1)(x-3)(x+3)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$

Ответ. 1; 3. ▲

Пример 4. (МГУ, 1974, экон. ф-т) Найти все действительные решения уравнения $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

$\triangle$ В ОДЗ обе части уравнения неотрицательны, поэтому возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному уравнению:

$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x=2x^2+2\sqrt{x^4-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^4-1}=-2x \Leftrightarrow$ (Здесь мы воспользовались условием равносильности)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^4-1=4x^2 \Leftrightarrow x^2=2+\sqrt{5}. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Ответ. $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$. ▲

Пример 5. (МГУ, 1999) Решите уравнение $\sqrt{\left|x^2+14x+47\right|-1}=\left|x+7\right|-1$.

$\triangle$ Здесь удобно сначала сделать замену переменных. Пусть $t=\left|x+7\right|$, тогда уравнение $\left|x+7\right|-1=\sqrt{\left|(x+7)^2-2\right|-1}$ примет вид $\sqrt{\left|t^2-2\right|-1}=t-1$. Решим его.

$\sqrt{\left|t^2-2\right|-1}=t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left|t^2-2\right|-1=t^2-2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left|t^2-2\right|=t^2-2t+2\equiv(t-1)^2+1>0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} t^2-2=t^2-2t+2, \\ t^2-2=-t^2+2t-2. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=0, \\ t=1, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x+7\right|=2, \\ \left|x+7\right|=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=-9, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-8. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ. –5; –6; –8; –9. ▲

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{7-\cos x-6\cos 2x}=4\sin x$

$\triangle$ $\sqrt{7-\cos x-6\cos 2x}=4\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ge 0, \\ 7-\cos x-6\cos 2x=16\sin^2 x. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ge 0, \\ 4\cos^2 x-\cos x-3=0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ge 0, \\ \left[\cos x=\left[\begin{array}{l} 1, \\ -\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \Leftrightarrow x=2\pi k; \\ \begin{cases} \cos x=-\dfrac{3}{4}, \\ \sin x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow x=\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+2\pi k. \end{array}\right.$

Ответ. $2\pi k$; $\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. ▲

§2. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

Рассмотрим подробнее самое простое уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ – уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$, $a\ne 0$ (1).

Его можно решать различными способами. Приведём три из них.

1. Можно воспользоваться приведённым выше условием равносильности: $\sqrt{ax+b}=cx+d \Leftrightarrow \begin{cases} cx+d\ge 0, \\ ax+b=(cx+d)^2. \end{cases}$
2. Можно сразу решить уравнение $ax+b=(cx+d)^2$ (ОДЗ уравнения выполняется автоматически), а затем сделать проверку: подставить найденные решения в заданное уравнение $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

Обязательна ли проверка? Да, надо отсечь решения уравнения $-\sqrt{ax+b}=cx+d$.
Рассмотрим решения уравнения на графике. Начертим эскизы левой и правой частей – например, рис.1.

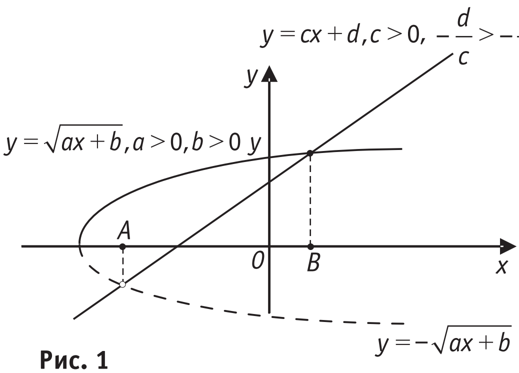


Рис. 1

В данном случае хорошо видно (рис.1), что полупарабола $y=\sqrt{ax+b}$ пересекается лишь с той частью прямой $y=cx+d$, где y принимает неотрицательные значения, а та часть прямой $y=cx+d$, где y принимает отрицательные значения, пересекается с полупараболой $y=-\sqrt{ax+b}, a>0, b>0$.

Но «лишние» корни могут и не появиться (рис.2.) – все зависит от коэффициентов в уравнении, а, значит, от взаимного расположения прямой и полупараболы.

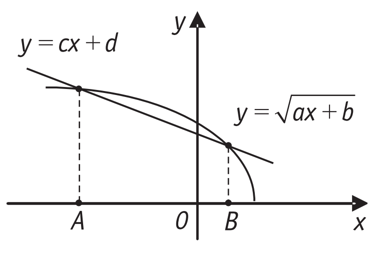


Рис. 2

3. Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$ можно также решать с помощью замены переменных, положив $t=\sqrt{ax+b}$, $t\ge 0$.

Тогда $ax+b=t^2$, и ОДЗ уравнения выполняется **автоматически.** При этом $ax+b=t^2 \Leftrightarrow x=\frac{t^2-b}{a}$ и уравнение (1) в новых переменных примет вид

$$t=\frac{c\left(t^2-b\right)}{a}+d \Leftrightarrow ct^2-at-bc+ad=0.$$

Задача свелась к нахождению **неотрицательных** решений квадратного уравнения $ct^2-at-bc+ad=0$, что под силу любому школьнику.

Пример 7. (МФТИ, 2000) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.

△ Решим задачу третьим способом. Пусть $\sqrt{x-8}=t$, $t\ge 0$, тогда $x=t^2+8$ и уравнение примет вид $at^2+t+5a-2=0$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a, при которых уравнение $at^2+t+5a-2=0$ имеет единственное **неотрицательное** решение. Это имеет место в следующих случаях.

1. $a=0$, $t=2$.
2. $a\ne 0, D\equiv 1-20a^2+8=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a=-\frac{1}{10}\Rightarrow t=5,\\ &a=\frac{1}{2}\Rightarrow t=-1.\end{aligned}\right. \Rightarrow$$ одно неотрицательное решение при $a=-\frac{1}{10}$.

3. $a\ne 0, D>0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right)$,

$$t_1t_2=\frac{5a-2}{a}\le 0 \Leftrightarrow a\in\left(0;\frac{2}{5}\right] \Rightarrow$$

имеем единственное неотрицательное решение при $a\in\left(0;\frac{2}{5}\right]$.

Итак, имеем **Ответ.** $\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{5}\right]$. ▲

§3. Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Пусть задано уравнение $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$.

Запишем ОДЗ: $\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$, но решать неравенства (за редким исключением) не надо.

В ОДЗ обе части неотрицательны, и возведение в квадрат дает равносильное уравнение. Поэтому

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \text{ в ОДЗ} \qquad (2)$$

Теперь видно, что для всех решений $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые знаки, поэтому при таком способе решения нет необходимости проверять неотрицательность обеих функций – **достаточно** проверить неотрицательность **одной** из них: выбирают ту, для которой неравенство проще проверить.
Можно записать полное условие равносильности, которое включает в себя ОДЗ уравнения:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Выбирают ту систему, в которой неравенство проще проверить (решать его не надо!).

Пример 8. Решите уравнение
$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4-4x^2+x+7}$.
△ Видно, что подкоренное выражение в левой части намного проще, чем в правой, поэтому запишем так полное условие равносильности:

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4-4x^2+x+7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1>0 \Leftrightarrow x\in R, \\ x^2+x+1=x^4-4x^2+x+7 \Leftrightarrow x^4-5x^2+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=3, \\ x^2=2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3}$. ▲

Пример 9. (МФТИ,1984) Решите уравнение
$\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x}$.
△Воспользуемся полным условием равносильности (3):

$$\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x\le 0, \\ 6\sin x\cos 2x=-7\sin 2x. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x\le 0, \\ \sin x\left(6\cos^2 x+7\cos x-3\right)=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0; \\ \begin{cases} 2\sin x\cos x\le 0, \\ \cos x=\frac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n, \\ \begin{cases} \sin x\le 0, \\ \cos x=\frac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n; \\ x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n. \end{array}\right.$$

Ответ. πn; $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$. ▲

§4. Применение графического исследования к решению задач ЕГЭ уровня А.

Уметь строить эскизы левой и правой частей уравнения $\sqrt{ax+b}=cx+d$ очень полезно. Графическая интерпретация решения такого уравнения помогает быстро решить некоторые задачи ЕГЭ.

Пример 10. Какое утверждение
1) уравнение имеет два корня одного знака (оба корня или положительны, или оба корня отрицательны);
2) уравнение имеет только один корень, и он отрицателен;
3) уравнение имеет два корня разных знаков;
4) уравнение имеет только один корень, и он положителен;

верно по отношению к корням уравнения

а) $\sqrt{x+4}=3(x+1)$,

б) $\sqrt{7-x}=x+1$,

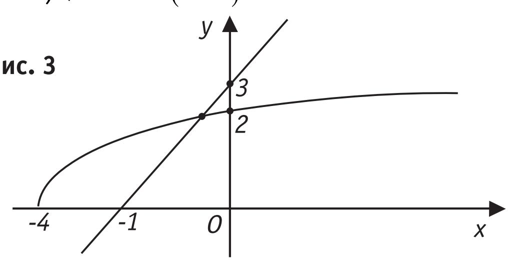
в) $3\sqrt{10-x}=12-x$,

г) $5\sqrt{7-x}=13-x$?

△ Для ответа на поставленный вопрос не обязательно решать уравнение. Часто достаточно аккуратно начертить эскизы левой и правой частей.

а) $\sqrt{x+4}=3(x+1)$.

Рис. 3



На чертеже надо отметить точки пересечений полупараболы и прямой с осями координат. Из рисунка 3 ясно, что пересечение происходит на отрицательной полуоси – это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось 0x правее полупараболы, а ось 0y выше полупараболы.

Ответ. 2).

б) $\sqrt{7-x}=x+1$.

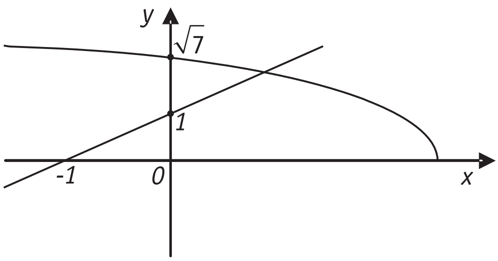


Рис. 4

Из рисунка 4 ясно, что пересечение происходит на положительной полуоси.
Это обеспечивается тем, что прямая пересекает отрицательную полуось 0x, а ось 0y прямая пересекает ниже полупараболы.

Ответ. 4).

в) $3\sqrt{10-x}=12-x$.

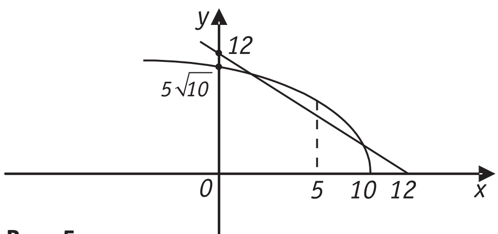


Рис. 5

Это более трудный пример, т. к. не ясно, прямая пересекается с полупараболой (а тогда дважды), касается или вовсе не имеет общих точек с полупараболой. Надо что-то сделать дополнительно, например, подставить такие значения x, при которых корни извлекаются нацело, или поискать точку ($x=5$), в которой ясно, что расположено выше – прямая или полупарабола.

Ответ. 1).

г) $5\sqrt{7-x}=13-x$.

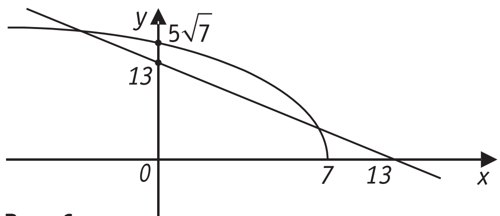


Рис. 6

Из рисунка 6 ясно, что корней два, и они разных знаков. Это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось 0x правее, а ось 0y ниже полупараболы.

Ответ. 3). ▲

Ворожцов Артём Викторович,
старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ.

ИНФОРМАЦИЯ, ЭНТРОПИЯ И ОБОБЩЁННЫЕ ВРУНЫ

Мало в нашем мире осталось того, что нельзя цифровать и зазиповать.

Книги, шедевры живописи, музыка, видео, 3D-объекты, красивые девушки ...

Всю реальность целиком моделируют, цифруют, кодируют, получая на выходе виртуальность.

Трудно поверить, что всё это лишь биты, биты, биты ... неисчислимый поток единичек и нулей.

Мы начинаем раздел «Теория информации и кодирования» с обсуждения «Что такое информация и как её измерять».

Что такое **ИНФОРМАЦИЯ?**

Гриша спрашивает у Пети: «Какой у нас третий урок?» – «Математика» – отвечает Петя. Он передал Грише нужную информацию. А сколько именно информации заключалось в ответе Пети? На этот вопрос может ответить **теория информации**.

Другая важная задача, которую решает теория информации и которая имеет непосредственное отношение к современным проблемам теле- и радиосвязи, такая: «Два человека соединены проводом (радиосвязью). Сколько информации они смогут друг другу передавать в единицу времени, если известны характеристики помех, возникающих в этом проводе (в эфире)?»

Как и в каких единицах измерять информацию станет ясно из такой следующей игры.

Игра «Угадай число».

Ведущий загадывает натуральное число от 1 до 100. Остальные играющие задают ему вопросы, на которые можно ответить либо «да», либо «нет». Нужно угадать число, задав как можно меньше вопросов.

Можно, например, задавать такие вопросы: «Верно ли, что это число 27?», «Загаданное число меньше 50?», «Загаданное число чётное?».

Сколько вопросов требуется для угадывания одного из первых n натуральных чисел? Нетрудно догадаться что для $n = 2$ необходим ровно один вопрос. Для $n = 3$ или 4 два вопроса.

Решим эту задачу для случая $n = 16$. Первый вопрос: «Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки?»:

1 2 3 4 5 6 7 8 | 9 10 11 12 13 14 15 16

После ответа на этот вопрос, мы будем знать, в какой половине находится загаданное число. Пусть слева. Тогда второй вопрос: «Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки между 4 и 5?» Если загаданное число находится справа от 8, то второй вопрос будет таким: «Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки между 12 и 13?»

1 2 3 4 | 5 6 7 8 | 9 10 11 12 | 13 14 15 16

После второго вопроса мы будем знать в какой из четырёх частей лежит загаданное число. Эту часть мы тоже разделим на две половинки, и после третьего вопроса узнаем, в какой из них лежит загаданное число. А после четвёртого вопроса мы будем знать само число. Итак, мы показали, что четырех воросов достаточно, чтоб угадать загаданное число из 16 возможных. За пять вопросов мы сможем наверняка узнать правильный ответ из 32 возможных:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

Вопрос называется **элементарным,** если он подразумевает два возможных ответа, например «Да» или «Нет».

Количество информации определяется минимальным количеством элементарных вопросов, которые нужно задать, чтобы *наверняка* выведать эту информацию. Количество информации измеряется в **битах**.

Чтобы выведать один бит информации, нужно правильно задать элементарный вопрос и получить на него ответ.

Если информация представляет собой один из n возможных равноправных вариантов, то её величина равна логарифму n по основанию 2:

$$I = \log_2 n.$$

В частности, $5 = \log_2 32$. Логарифм может принимать любые значения, в том числе и нецелые. Мы не можем задать полтора вопроса или π вопросов, но тем не менее дробное количество информации имеет смысл. Задав вопрос, допускающий три возможных ответа, мы получим $\log_2 3 \approx 1.5848\ldots$ бит информации. Клод Элвуд Шеннон[1], создатель теории информации, определил в 1945 году как следует интерпретировать дробное (любое неотрицательное вещественное) количество информации.

Задача 1. Грише сказали, что следующий урок математика. До этого он знал, что следующий урок либо математика, либо физика, либо рисование, либо география. Сколько бит информации сообщили Грише?

Решение: Количество возможных вариантов следующего урока равно 4.

Ответ: $I = \log_2 4 = 2$.

Задача 2. У Васи есть одна доминошка. Он признался, что у него дубль. Сколько информации он нам сообщил?

Решение: После признания Гришы осталось 7 вариантов. Количество информации, которую он по прежнему от нас скрывает равно $\log_2(7)$. А до признания он скрывал $\log_2(28)$. Поэтому Гриша сообщил нам $\log_2(28) - \log_2(7) = 2$ бит.

Итого: количество информации $I(a)$, необходимое для описания объекта a равно логарифму по основанию два от количества возможных объектов N:

$$I(a) = \log_2 N. \qquad (1)$$

Количество информации о каком-то объекте, которую мы получили в сообщении, равно логарифму от отношения количества возможных вариантов до сообщения на количество возможных после.

Если обозначить сообщение буквой ω, то

$$I(\omega) = \log_2 \left(\frac{N_{\text{до получения } \omega}}{N_{\text{после получения } \omega}}\right).$$

Например, если Гриша нам признался, что оба числа на его доминошке нечётные, то он нам сообщил $\log_2 \frac{28}{6} \approx 2.22$ бит информации.

Значительная часть простых задач теории информации сводится к **комбинаторным задачам**, то есть к вычислению числа объектов с некоторой данной конфигурацией. Другая часть задач связана с вычислением функции ЭНТРОПИИ.

[1] **Клод Элвуд Шеннон (Claude Shannon), 1916-2001** – дальний родственник Томаса Эдисона, был сотрудником Bell Laboratories с 1941 до 1972 г. В его работе «Математическая теория коммуникаций» (scriptsize http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/), опубликованной в 1948 г., впервые определялась мера информационного содержания любого сообщения и понятие кванта информации – **бита**. Эти идеи легли в основу теории современной цифровой связи. Другая работа Шеннона «Communication Theory of Secrecy Systems», опубликованная в 1949 г., способствовала превращению криптографии в научную дисциплину.

ЭНТРОПИЯ как мера незнания

Задача 3. Перед нами 5 чёрных ящиков. В каждом из них находится либо чёрный, либо белый шарик. Мера неизвестности (неизвестной информации) равна 5 бит. Нам говорят, что 3 из них белые. Сколько информации нам сообщили? Сколько нам осталось узнать?

Решение: Сначала было 2^5 вариантов и мера неизвестности равнялась $\log_2(2^5) = 5$. Когда нам сказали, что 3 шарика белые, число возможных вариантов стало равно количеству возможных распределений 3 белых и 2 чёрных шариков по 5 ящикам. Их 10 штук (1 – белый, а 0 – чёрный):

(11100), (11010), (11001), (10110), (10101), (10011), (01110), (01101), (01011), (00111).

Это число распределений равно $C_{3,2} = C_5^3 = C_5^2$ и называется также числом сочетаний 3 элементов из 5, или 2 элементов из 5, или биномиальным коэффициентом (2, 3). Это число $C_{3,2} = 10$ получается так: первый нолик можно поместить на любое из 5 мест, второй – на любое из оставшихся 4. Всего получается 20 вариантов. Но среди них каждый вариант повторён дважды – сначала места для ноликов выбраны в одном порядке, потом – в другом. А нам неважно, в каком порядке были выбраны места для ноликов. Поэтому реальных вариантов в два раза меньше –10 штук.

Ответ: Было неизвестно 5 бит, потом стало неизвестно $\log_2(C_{3,\ 2}) = \log_2(10) \approx 3.32$ бит, значит нам сообщили $5 - \log_2(10) \approx 1.68$ бит информации.

Давайте обобщим эту задачу.

Задача 4. Перед нами сколько-то чёрных ящиков. В каждом из них находится либо чёрный, либо белый шарик. Нам говорят, что 60% из них белые. Сколько информации нам осталось узнать? То есть, чему равна мера нашего незнания? Решите эту задачу, когда число ящиков равно

а) 10; б) 100; в) 1000; г) *n*.

Решение: По аналогии получаем а) $\log_2(C_{6,4})$, б) $\log_2(C_{60,\ 40})$, в) $\log_2(C_{600,\ 400})$, г) $\log_2(C_{0.6n,\ 0.4n})$.

Надо поподробнее изучить числа C_{m_1, m_2} – это количество способов разместить m_1 единичек и m_2 ноликов по $m_1 + m_2$ местам. Какова общая формула для C_{m_1, m_2}? Для вычисления удобно пользоваться такой формулой

$$C_{m_1, m_2} = C_{m_1-1, m_2} + C_{m_1, m_2-1}.$$

Докажем эту формулу. Давайте поместим на первое место единичку и разместим в оставшихся позициях m_1-1 единичку и m_2 нолик. Это можно сделать C_{m_1-1, m_2} способами. Затем поставим на первое место нолик и разместим в оставшихся позициях m_1 единичку и m_2-1 нолик. Это можно сделать C_{m_1, m_2-1} способами. В итоге мы переберём все возможные размещения m_1 единичек и m_2 нолика. Эта формула позволяет нам просто вычислять C_{m_1, m_2}

0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	

Это **треугольник Паскаля**. Каждое число в этом треугольнике есть сумма двух над ним стоящих. Чтобы узнать чему равно $C_{2,3}$, нам нужно взглянуть на $2+3=5$-ую строчку. На первом месте стоит 1 – это $C_{5,0}$, число способов размещения пяти единичек по пяти местам. Далее $C_{4,1} = 5$, число способов разместить 4 единички и один ноль по пяти местам. Далее следует нужное нам $C_{3,\ 2} = 10$, число способов разместить 3 единички и 2 нулика по 5 местам.

Задача 5. Чему равно $C_{2,4}$? Чему равно $C_{3,4}$?

Задача 6. Чему рано наше незнание, если мы знаем, что 3 бита из 8 бит байта единички, а остальные нули? Байт – это восемь мест, в которых стоят нули и единицы.

Если мы в треугольнике Паскаля дойдём до 11 строчки, то получим $\{1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1\}$. Эти числа нарисованы в виде гистограммы на рис.1, а логарифмы этих чисел, делённые на 11, на рис. 2

Утверждение 1. *Если нам сообщают, что* 600 *из неизвестных нам* 1000 *бит единички, то мера нашего незнания, равная изначально* 1000, *уменьшается до* $\log_2(C_{600,\ 400})$ *или в общем случае, когда* $p \cdot n$ (*где* $0 < p < 1$) *из неизвестных нам* n *бит есть единички, мера нашего незнания, равная изначально* n, *уменьшается до* $\log_2(C_{p\cdot n,\ (1-p)\cdot n})$. *Мера нашего незнания умножается на число меньше 1, которое равно*

$$\frac{\log_2(C_{p\cdot n,\ (1-p)\cdot n})}{n}.$$

Давайте рассмотрим это соотношение подробнее. Обозначим его $H_n(p)$. Это число можно интерпретировать как незнание, приходящееся на каждый из n бит. Или так: столько информации нам осталось узнать про каждый бит, после того, как нам сказали, что $p\cdot 100\%$ бит равны 1.

Определение. ***Энтропией*** *случайной величины с вероятностями* $\{p, 1-p\}$ *называется функция*

$$H(p) = -(p \cdot \log_2 p + (1-p) \cdot \log_2 (1-p)).$$

Утверждение 2. *Чем больше* n, *тем более схожи функция* $H_n(p)$ *и функция энтропии* $H(p)$. *Выбирая большие* n, *мы можем сделать их сколь угодно мало отличающимися в каждой точке.*

Строгое доказательство этой теоремы использует явную формулу

$$C_{m_1,\ m_2} = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!\cdot m_2!}.$$

и формулу Стирлинга, суть которой заключена в том, что мы можем $n!$ заменять на $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Если в ящиках чёрные, белые и синие шарики, то мера незнания про каждый ящик равна $\log_2 3$. Но когда нам сообщают информацию, что 30% шариков чёрные, 25% – белые, остальные 45% синие, то мера нашего незнания о том, что хранится в каждом ящике, уменьшается с $\log_2 3 \approx 1.585$ до величины $H(\{0.3, 0.25, 0.45\}) = -(0.3\log_2 0.3 + 0.25\log_2 0.25 + 0.45\log_2 0.45) \approx 1.539$

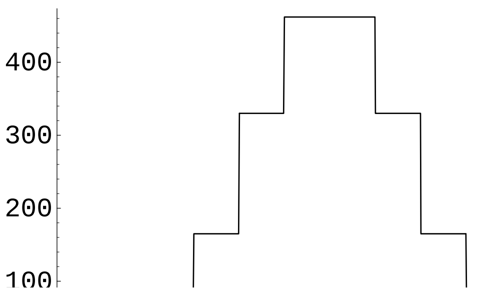


Рис. 1: «График» 11-ой строчки треугольника Паскаля.

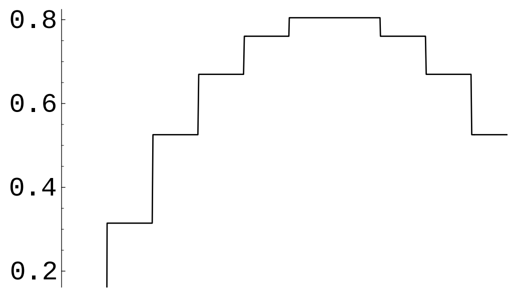


Рис. 2: $H_{11}(p)$ Логарифмы от чисел 11-ой строчки треугольника Паскаля, делённые на 11.

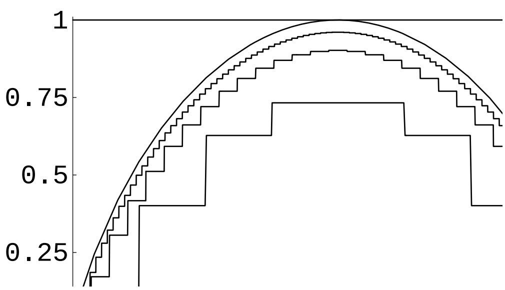


Рис. 3: Функция $H_n(p) = \dfrac{\log_2(C_{p\cdot n,\ (1-p)\cdot n})}{n}$ для $n = 7, 28, 91$. Самый верхний график – это график функции $H(p)$.

То есть случайная величина с вероятностями

$p_1, p_2, p_3,$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

имеет энтропию

$H(\{p_1, p_2, p_3\}) = -(p_1 \cdot \log_2 p_1 + p_2 \cdot \log_2 p_2 + p_3 \cdot \log_2 p_3) =$

$= -\sum p_i \cdot log_2\, p_i.$

Общая формула энтропии случайной величины такая:

$H = -\sum p_i \cdot log_2\, p_i.$

Случайная величина – это конвеер, по которому поступают чёрные ящики, мы их открываем и узнаем, что там. Известно процентное содержание различных элементов в этих ящиках.

Энтропия позволяет записать более общую формулу для информативности сообщения.

Если обозначить сообщение как ω, то

$$I(\omega) = H_{\text{после получения } \omega} - H_{\text{до получения } \omega}. \quad (2)$$

Вруны и обобщённые вруны

А что, если человек, который нам отвечает на вопросы, заядлый врунишка? Если он абсолютный врун, то ничего страшного нет.

Например, если он на вопрос «Это ты съел варенье?» отвечает «Нет!» – значит съел. Абсолютный врун – это тот, кто всегда врет. Абсолютные вруны являются прекрасными проводниками информации, надо только все их ответы интерпретировать наоборот!

Конечно, абсолютных врунов не бывает. Чаще встречаются обычные, нормальные вруны, которые врут, скажем, в 40% случаев. С ними гораздо сложнее. Но и у них можно выведать всю правду. Только придется задать больше вопросов. То, сколько бит выведанной информации в среднем приходится на один вопрос, называется пропускной способностью «обобщённого вруна».

Её можно вычислить так: зададим обобщённому 40%-вруну n элементарных вопросов. Мы знаем, что на 40% вопросов он соврал. Информация о том на какие именно из заданных он соврал представляет собой $n \cdot H(0.4)$ бит. Это значит, что если бы он перестал врать, то мы за $n \cdot H(0.4)$ элементарных вопросов узнали бы, где он соврал. Но врун врёт. И пока мы будем у него выяснять, в каких именно вопросах он нам соврал, он нам будет продолжать врать, и всё путать. Лучше рассуждать по-другому. Предположим, что мы смогли составить так n вопросов, что в полученных n ответах содержалась нужная нам перевранная информация размером m бит и еще информация о том, в каких именно из n ответов он врал. То есть

$$m + n \cdot H(0.4) = n \text{ или}$$

$$m = n - n \cdot H(0.4) = n \cdot (1 - H(0.4))$$

и пропускная способность вруна

$$v = \frac{m}{n} = 1 - H(p).$$

Это значит, что если умело задавать вруну вопросы, то за n вопросов можно выведать у него $n \cdot (1 - H(p))$ бит.

Тот же результат можно получить из таких рассуждений: На выходе у вруна ответы «Да» и «Нет». Мера неопределённости равна один бит. Но в этой мере неопределённости часть неопределённости возникает из-за случайности «вранья». Каждый раз врун кидает монетку, чтоб решить – врать или не врать. Мера этой неопределённости равна $H(p)$. Значит, «полезная», не связанная с враньём неопределённость в одном ответе равна $1 - H(p)$.

На рисунке 4 показана геометрическая интерпретация пропускной способности. Длина отрезка AB и есть пропускная способность. Рядом показан случай несимметричного вруна, который в случае правильного ответа «Да» врёт с одной вероятностью α, а в случае ответа «Нет» – с другой вероятностью β.

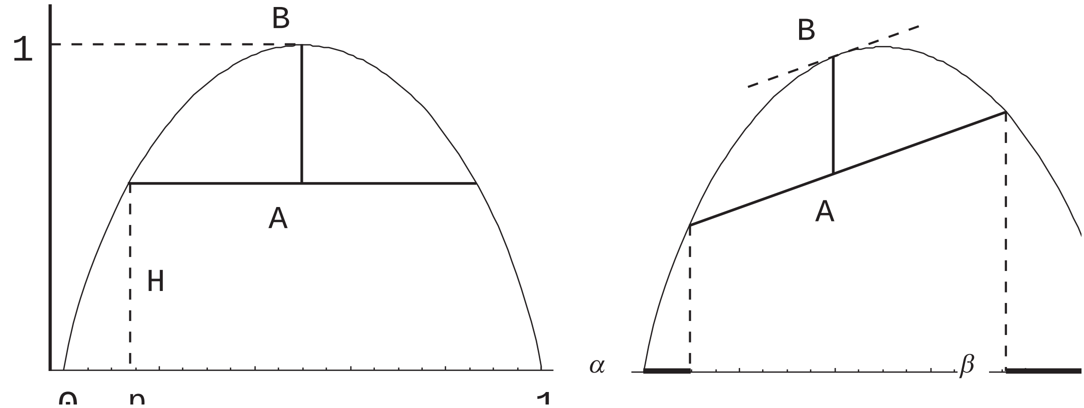


Рис. 4: Пропускная способность равна длине отрезка AB. Слева – **симметричный врун**, справа – **несимметричный врун**. Несимметричность означает, что когда нужно отвечать «Да» врун врёт с одной вероятностью α, а когда «Нет» – с другой вероятностью β.
Если врун врёт с вероятностью 1/2 в обоих случаях, то нам никогда не удастся у него ничего выяснить.

Задачи по теории информации

Задача 7. Коля съел на переменке шоколадку, яблоко и кекс. Сколько элементарных вопросов надо задать, чтоб узнать, в какой последовательности он их съел. Сколько информации от нас скрыто? А если Коля съел 6 различных объектов?

Задача 8. Натуральное число n. Известно, что оно чётное и $5 \leqslant n \leqslant 20$. Сколько элементарных вопросов нам нужно задать, чтобы узнать это число?

Задача 9. В книге восемь рассказов, в каждой главе 32 страницы. Вася сказал, что он читает 5-ый рассказ. Сколько информации он нам сообщил? Сколько информации осталось у него выведать, чтобы узнать какую страницу он читает?

Задача 10. Мы сказали продавцу, что хотим купить коньки. Но коньки бывают обычные и роликовые, белого, чёрного, зелёного и фиолетового цвета. Кроме того, есть размеры 38, 39, 42 и 44. Сколько информации вам нужно сообщить продавцу?

Задача 11. Нам сказали, что сумма чисел у доминошки X равно 3. Сколько информации нам сообщили?

Задача 12. Коля выучил стихотворение, в котором 32 слова. Оцените информацию, которую он запомнил. (Считайте, что всего в русском языке 10000 слов). По каким причинам сделанная вами оценка несколько завышена?

Задача 13. «Граждане встречающие! Поезд 26 прибывает на 7-ой путь в 19:35.» Сколько информации содержится в этом сообщении? (Всего на вокзале 8 платформ, ежедневно прибывает и отправляется в путь 120 поездов).

Задача 14. Преступник имеет следующие приметы: молодой человек, яркий брюнет, с заметной родинкой на левой щеке. Сколько информации нам про него известно? Считайте что ярких брюнетов 20%, с родинкой на левой щеке 5%. Здесь «молодой» означает: 17-22 лет с вероятностью 0.25, 23-28 лет с вероятностью 0.5, 29-34 лет с вероятностью 0.25. В то время как общее распределение по возрастам такое: до 17 лет – 0.375, 17-22 лет – 0.125, 23-28 лет – 0.125, 29-34 лет – 0.125, 35 лет и старше – 0.25:

возраст	вероятность выглядеть молодо	доля людей данного возраста
до 17	0	0.375
17-22	0.25	0.125
23-28	0.5	0.125
29-34	0.25	0.125
после 34	0	0.25

Подсказка. Для вычисления информативности сообщения о молодости пользуйтесь формулой 2 на стр. 38.

Задача 14. «У доминошки *X* числа разные». Сколько информации нам сообщили и сколько ещё осталось узнать, чтоб однозначно определить доминошку? Придумайте элементарные вопросы, которые нужно для этого задать.

Задача 16. Известно, что класс 8 А состоит из 7 отличников, 16 хорошистов, 8 троечников и 4 двоечников. Сколько информации содержится в сообщении:

а) «Коля хорошист»
б) «Коля не двоечник»
в) «Коля учится без троек»
г) «Коля не отличник»?

Считайте, что Коля – случайный ученик из 8-го А класса.

Задача 17. У Коли в прошлом учебном году было 6 предметов и 4 четверти. Нам сказали, что у него нет двоек и троек. Сколько информации нам сообщили?

Задача 18. Решите предыдущую задачу при условии, что нам сказали, что у Коли ровно половина пятёрок и половина четвёрок в каждой четверти.

Задача 19. У Оли есть карта. Мы знаем, что масть этой карты – крести. Сколько информации нам известно?

Задача 20. Изначально мы знаем, что $3 < \pi < 4$. Сколько дополнительной информации о числе π содержится в записи $\pi = 3.14159265\ldots$?

Как играть в Го

Игровое поле в ней представляет собой квадратную решётку 19 на 19 линий. Поединок начинается на пустой доске, и соперники, играя чёрными и белыми фишками, которые в Го называются камнями, по очереди ставят их на пересечения линий, пытаясь окружить территории на доске. В этом смысле Го является игрой-конструированием. Однажды поставленные фишки уже не передвигаются по игровому полю. Подробные правила вы найдете на сайте российской федерации игры Го ***http://go.aspec.ru/***. Для начинающих полезны ресурсы ***http://www.go.hobby.ru/*** *и* ***http://go-spb.da.ru/***.

Го – это ещё и война. Если игроку удаётся окружить группу камней противника, эта группа удаляется с доски. Стремясь захватить территорию, каждый игрок пытается окружить чужие камни, при этом защищая свои собственные. Игра обычно заканчивается соглашением сторон о том, что уже никто не может улучшить свою позицию. Победитель определяется по размеру захваченной территории; учитываются также снятые камни противника. Впрочем, такое объяснение игры поверхностно. Если шахматы представляют собой одно большое сражение, то Го – целая военная кампания. В ней может бушевать несколько битв одновременно, ни одна из которых не является решающей, при том что один-единственный ход может изменить положение на всей доске. Любители Го говорят, что их игра отличается от шахмат, как поэзия от бухгалтерского учёта.

Изобретённая в Китае, наибольшего расцвета Го тем не менее достигла в Японии, куда проникла в первые века нашей эры. 701 год стал великим годом в истории Го на Японских островах: императорским эдиктом игра была признана неазартной и приравнена к упражнениям на музыкальных инструментах. В 1603 году была учреждена Академия Го, а её президентом стал выдающийся игрок того времени Хонинбо Санся. Впервые в истории одарённый спортсмен поступил на службу государству в качестве профессионала, получающего жалованье. Что касается самой игры, то Го была признана частью японской культуры, подобно чайной церемонии или оригами.

В скором времени уровень игры в Го стали рассматривать как своеобразный показатель интеллектуального развития человека, что привело к появлению профессиональных игроков и преподавателей. А это, в свою очередь, способствовало дальнейшему развитию и совершенствованию теории игры. В настоящее время в Японии проводится большое количество соревнований по Го, как профессиональных, так и любительских. Федерации и клубы поклонников Го есть во всем мире и, конечно, в крупных городах России, где регулярно проводятся чемпионаты и турниры.

Кстати, Леонард Эйлер, основоположник Петербургской Академии наук, чрезвычайно интересовался этой игрой, и когда почувствовал себя основательно в ней подкованным, решил сыграть с восточными мастерами. Он потерпел целый ряд поражений. Корейцы, китайцы и японцы по-прежнему стабильно поддерживают свой приоритет на международных чемпионатах по Го.

Пример игровой ситуации в игре Го. Суть игры заключается в том, чтобы окружить и «задушить» фишки соперника. Связный кусочек из фишек одного цвета исчезает («задыхается»), если у него нет соседних свободных клеток. Если у связного кусочка есть внутри две или больше «дырок» («дырка» или «глаз» – это небольшая связная группа свободных клеток внутри связного одноцветного кусочка), то он становится «бессмертным». Подробнее о правилах игры Го можно прочитать на ***http://go.aspec.ru.***

Сеанс игры в Го через Интернет

Есть замечательная возможность играть в Го через Интернет, а не на настоящей доске. Это черезвычайно удобно, поскольку заняться этим можно в любое время суток, не выходя из дома, кроме того, у вас будет большой выбор игроков.

На интернет серверах Го бывают игроки как самого высокого уровня, так и новички, и при желании всегда можно найти учителя, который поможет вам в профессиональном росте, или противников, подходящих по уровню. Игра происходит при помощи программ-клиентов. Эти программы создают удобную среду, находясь в которой вы можете общаться и вести игру, не задумываясь о том, благодаря каким технологиям это возможно. Чтоб поставить камень, вы просто щёлкаете мышкой в нужном месте доски.

Решили попробовать? Тогда зарегистрируйтесь на Го-сервере ***(http://www.games.yahoo.ru*** *или* ***http://igs.joyjoy.net/English/).*** После этого вы получаете список игроков, присутствующих на сервере в данный момент.

У игроков указан рейтинг. Вам также присвоят некоторый начальный рейтинг, который будет меняться по мере проведения вами партий. Вы можете выбрать игрока по силе и предложить ему игру. Когда игра начинается, на экране открывается окно с игровой доской. Есть возможность наблюдать за играми других игроков, посылать сообщения и читать комментарии других игроков. Удачи!

Статья написана на основе учебных материалов Физтех-Колледжа ***(http://www.phtc.ru)***

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
дополнительного образования детей
«Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)»

ОБЪЯВЛЯЕТ НАБОР УЧАЩИХСЯ НА 2005 – 2006 УЧЕБНЫЙ ГОД

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ при МФТИ как государственное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие 38 лет школу окончили более 70 тысяч учащихся; практически все её выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует школу Федеральное агентство по образованию. Обучение в ЗФТШ для граждан, проживающих в Российской Федерации, в рамках утверждённого плана приёма – бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит специалистов по единому направлению «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие учёные, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2005-2006 учебный год проводится на следующие отделения:

Заочное *(индивидуальное обучение)*. **Тел./факс: (095) 408-51-45.**

Приём на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведённого в данном объявлении. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8 – 11 кл.), но поступать можно в любой из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (по 4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6-7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и по 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания школы составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – бывшие выпускники школы).

Очно-заочное *(обучение в факультативных группах)*. **Тел./факс: (095) 485-42-27.**

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в школу фамилии, имена, отчества её руководителей и поимённый алфавитный список обучающихся (Ф. И. О. полностью с указанием класса текущего учебного года и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике), **телефон, факс и e-mail школы.** Все эти материалы и конверт для ответа о приёме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать **до 25 июня 2005 г.** по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство факультативными занятиями по предоставлению ЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися: будут получать *в течение учебного года* учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т. п.); приглашаться на курсы повышения квалификации, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию*.

Очное *(обучение в вечерних консультационных пунктах)*. **Тел.: (095) 409-95-83.**

Для учащихся Москвы и Московской области по программе школы работают вечерние консультационные пункты, набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят во второй половине сентября.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам школы (всех отделений) предлагается участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2005», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультативов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях.

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ переводятся в следующий класс, а выпускники (11кл.) получают свидетельства об окончании ЗФТШ с итоговыми оценками по физике и математике, которые учитываются на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса в школу принимаются **победители** *областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2004-2005 уч. г*. Им необходимо до 15 мая 2005 г. выслать в ЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в выше перечисленных олимпиадах.

Вступительное задание по физике и математике ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради (на русском языке). Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На **лицевую** сторону обложки наклейте лист бумаги, чётко заполненный по образцу: (в ЗФТШ ежегодно приходит более 5 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами).

Л.№																		
№ задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Σ
Физика																		
Математика																		

таблица заполняется методистом ЗФТШ

1. Область	***Тюменская***
2. Фамилия, имя, отчество	***Каменев Виталий Петрович***
3. Класс, в котором учитесь	***восьмой***
4. Номер школы	***14***
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	***обычная***
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона), e-mail	***628305, г. Нефтеюганск мкрн 11б, д.15, кв.22. (34612)7-63-45***
7. Место работы и должность родителей: отец	***СПД «НВ», машинист ДЭУ,***
мать	***НРМУП УКС, сторож***
8. Адрес школы и телефон, факс, e-mail	***628305, г. Нефтеюганск, мрн 11б, д.52, (34612)53-07-48***
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей по физике	***Еремин Владимир Николаевич***
по математике	***Михалева Лидия Игоревна***
10. Каким образом к Вам попала эта афиша?	

ВНИМАНИЕ! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий обязательно вложите в тетрадь **два одинаковых** бандерольных конверта размером 160х230 мм с наклеенными марками номиналом 7 руб. На конвертах чётко напишите свой домашний адрес.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ в рамках утверждённого плана приёма, необходимо будет оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы.

Сумма взноса будет составлять ориентировочно для учащихся заочного и очного отделений 300-500 руб. в год, для очно-заочного – 600 -1000 руб. (с каждой факультативной группы).

Срок отправления решения – **не позднее 1 марта 2005 года.** Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приёмной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2005 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680, г. Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Тел: (044) 424-30-25.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

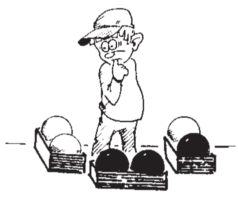
Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике: задачи 1 – 5 предназначены для учащихся 7-х классов; задачи 2, 4 – 8 для 8-х классов; задачи 6 – 12 для 9-х классов; 11 – 17 – для 10-х классов.

В задании по математике: задачи 1 – 5 для учащихся 7-х классов; задачи 2 – 7 для 8-х классов; задачи 5 – 11 для 9-х классов; задачи 8 – 14 для 10-х классов.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
МАТЕМАТИКА

1 На столе стоят три одинаковых ящика. В одном из них лежат два чёрных шара, во втором – два белых, в третьем – чёрный и белый. На ящиках сделаны надписи «два белых», «два чёрных», «чёрный и белый», причём ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шар, определить, где лежат какие шары?



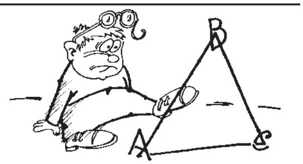
2 Найти минимальное натуральное число, о котором известно, что:

1) если его умножить на 17, то результат разделится на 24;
2) если его разделить на 11, то результат разделится на 5;
3) если его разделить на 2, то получится квадрат некоторого натурального числа.

3 Доказать, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 11, то и каждое из них делится на 11.

4 Группу школьников нужно рассадить в столовой. За стол можно усадить три человека. Если сажать за стол по 2 девочки, то окажется 3 стола, где сидят одни мальчики, а, если сажать за стол по 2 мальчика, то будет 2 стола с одними девочками. Сколько было девочек в группе?

5 В треугольнике *ABC* провести прямую, пересекающую стороны *AB* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно, так, чтобы *AM*=*MN*=*BN*. В каком случае *MN* будет параллельна *AC?*



6 В урне лежали чёрные и белые шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу чёрных как 3 : 2. После того, как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и чёрных шаров стало 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

7 При каком целом значении параметра k отношение корней уравнения
$$x^2+(2k-5)x-9k=0.$$
равно 2?

8 Найти все тройки различных целых чисел, являющихся тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а также первым, вторым и пятым членами арифметической прогрессии.

9 Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy-x-y=0; \\ \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

10 В треугольнике *ABC* со сторонами *AB* = *14*, *AC* = *15*, *BC* = *13* через основание высоты *CH* проводятся прямые, параллельные прямым *AC* и *BC,* которые пересекают соответственно стороны *BC* и *AC* треугольника в точках *M* и *N*. Прямая *MN* пересекает продолжение стороны *AB* в точке *D*. Найти длину отрезка *BD*.

11 Решить неравенство
$$\sqrt{x^2-6x+8}-\sqrt{x^2-7x+10}<1.$$

12 Найти все значения параметра a, при которых система неравенств имеет единственное решение. $\begin{cases} x^2 - x + a \le 0; \\ x^2 + 2x - 6a \le 0. \end{cases}$

13 Решить уравнение $\cos x\sqrt{1+\sin x - 2\cos x} = \cos x - \sin x.$

14 Какая наименьшая площадь может быть у прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете AB касается гипотенузы AC и проходит через точку B ?

ФИЗИКА

1 Катер, двигаясь без остановок, поднялся вверх по реке на некоторое расстояние, а затем повернул назад и вернулся в пункт отправления. Скорость катера в стоячей воде $V_K = 3$ м/с. Определите скорость течения реки V_P, если известно, что средняя скорость движения составила 15/16 от скорости катера в стоячей воде.

2 Автобус отправляется из города A в город $Б$, в который он должен прибыть через 4 часа. Первый час автобус ехал с некоторой постоянной скоростью V_1. После этого, чтобы прибыть по расписанию в город $Б$, водителю пришлось увеличить скорость движения в α =1,2 раза. После прибытия в город $Б$ к назначенному времени оказалось, что автобус за последний час проехал на L = 3 км больше, чем за первый час. Определите среднюю скорость движения автобуса на первой половине пути.

3 К динамометру подвешен стакан, заполненный водой до краёв. Показание динамометра равно F_1 = 3 Н. На дно стакана опускают небольшой камень массой m_K = 100 г, который оказывается полностью погружённым в воду. Определите новое показание динамометра. Плотность камня ρ_K = 2500 кг/м^3.

4 Определите максимальное давление под крышкой скороварки, если диаметр отверстия предохранительного клапана скороварки d = 5 мм, а масса грузика, закрывающего клапан, m = 60 г. Атмосферное давление P_a равно 760 мм.рт. ст. (101000 Па)

5 Какую наибольшую массу может иметь кусок железа, погружённого (полностью) в воду на нити, чтобы нить не оборвалась? Известно, что нить выдерживает силу натяжения F_H = 200 Н. Плотность железа $\rho_Ж$ = 7800 кг/м^3. Массой нити пренебречь.

6 U – образная вертикально расположенная трубка постоянной площади поперечного сечения частично заполнена водой, так что расстояния от открытых концов трубки до уровня воды в коленах равны h = 5 см. Какой максимальный по толщине слой масла с плотностью ρ_M = 800 кг/м^3 можно налить в одно из колен трубки, чтобы масло не выливалось? Масло и вода не смешиваются.

7 Имеются два цилиндрических стакана массой m_{CT} каждый. На дно первого кладут медный брусок массой m_1 и стакан опускают в воду так, что он плавает, погрузившись в воду до краев. Ко дну второго стакана снизу прикрепляют медный брусок массой m_2 и тоже опускают в воду так, что стакан плавает, погрузившись в воду до краев. Найдите отношение масс медных брусков. Плотность меди ρ_M = 8900 кг/м^3. Толщиной стенок и дна стаканов пренебречь.

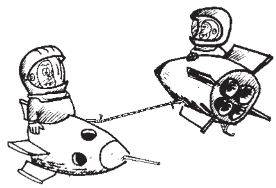
8 С помощью маленького нагревателя мощностью $P = 250$ Вт воду в ведре удалось довести до максимальной температуры 40° С. Каков объём воды в ведре, если после отключения нагревателя температура понизилась на 1° С за 2 минуты? Теплоёмкостью нагревателя и ведра пренебречь.

9 При напряжении $U = 1{,}2$ В на концах куска медной проволоки постоянного круглого сечения по ней течёт ток силой $I_1 = 100$ мА. Если отрезать от куска $\Delta L = 4$ м и подать на оставшуюся проволоку то же напряжение, то сила тока возрастает на 20 мА. Определите диаметр проволоки. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

10 Камень, брошенный вертикально вверх с некоторой скоростью V_0, достигает максимальной высоты H за время t_1. Если с этой высоты камень бросить со скоростью V_0 вертикально вниз, то время падения составит t_2. Определите высоту H и скорость V_0, считая известными t_1, t_2 и g.

11 Брусок массой m из состояния покоя под действием силы F, направленной вдоль горизонтального стола, начинает двигаться по его поверхности. Через время Δt_1 действие силы F прекращается, и, спустя время Δt_2 после этого, брусок останавливается. Чему равна сила трения, действовавшая на брусок во время движения? На какое расстояние брусок переместился за всё время движения?

12 Определите силу натяжения троса, связывающего два космических корабля, которые вращаются вокруг Земли по круговым орбитам радиусами R_1 и R_2 так, что трос всегда направлен к центру Земли. Массы кораблей одинаковы и равны m, масса Земли $M_З$. Гравитационным взаимодействием между кораблями пренебречь.



13 Сколько молекул водорода находится в объёме 1 л при температуре 27° С и давлении 750 мм.рт.ст.? Водород в данных условиях считать идеальным газом.

14 Моль гелия при постоянном объёме $V_0 = 200$ л охладили на $\Delta T = 1$ К, так, что давление упало на 0,2%. На сколько уменьшилось давление газа? Какова была начальная температура газа?

15 В герметичный сосуд объёмом 10 л поместили 1 моль кислорода и 1 моль водорода. Гремучую смесь подожгли. Какая максимальная масса воды может сконденсироваться в сосуде после охлаждения продуктов реакции до 100° С?

16 С одним молем идеального газа проводят тепловой процесс, в котором газ сначала изобарически расширяется, а затем изохорически охлаждается. При этом газом совершена работа A. Отношение максимального давления к минимальному во всем процессе равно k. Определите температуру газа в начальном состоянии, если известно, что она равна температуре газа в конечном состоянии.

17 В цилиндре под поршнем находятся $\nu_1 = 0{,}5$ моля воды и $\nu_2 = 0{,}5$ моля пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе, так, что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT. Какое количество теплоты было подведено к системе «жидкость – пар» в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ. Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu \cdot 3RT$ (R – универсальная газовая постоянная). Пар считать идеальным газом.

Слободянин Валерий Павлович
Заместитель декана факультета общей и прикладной физики, к.ф.-м.н., Руководитель национальной сборной команды России на МФО

Наши в Южной Корее

Поехать на Международную олимпиаду школьников мечтает практически каждый ученик, включившийся в олимпиадное движение. Это венец тернистой дороги соревнований в области естественнонаучных дисциплин.

Команда должна выглядеть с иголочки... Идёт примерка

Иоголевич И.А., «Эдисон», Козел С.М.

В период с 15-го по 23-е июля 2004 года в Южной Корее, в городе Поханг, расположенном на восточном побережье Корейского полуострова, проходила 35 Международная физическая олимпиада школьников. В ней приняли участие команды из 73 стран. Вернулась после 25-летнего перерыва в лоно олимпиадного движения команда Франции. Прислала своего наблюдателя Япония, ранее не участвовавшая в олимпиадах по физике. Это означает, что Япония имеет намерение в следующем году присоединиться к олимпиадному движению. Общее число участников олимпиады составило 332 школьника (против 238 участников в прошлом году).

Сборную команду России на 35 Международную физическую олимпиаду школьников составили:

1. Глазырин Семён – гимназия № 127 города Снежинска Челябинской области (учитель физики – Е.М. Елькина)
2. Речистов Григорий – многопрофильный лицей города Вологды (учитель физики – Л.Н. Суханов и А.Г. Дрижук)
3. Офёркин Игорь – школа № 18 города Новочебоксарска (учителя физики – Л.Н.Турковская и В.Д. Кочаков)
4. Лесничий Яков – лицей № 3 города Кропоткин Краснодарского края (учитель физики – Н.Г. Чёрная)
5. Андреев Иван – экспериментальная школа № 82 города Черноголовка Московской области (учителя физики – В.Г. Егоров и Г.В. Любимова).

Возглавляли команду России профессор

МФТИ С.М. Козел и доцент МФТИ В.П. Слободянин. В качестве наблюдателя от России на олимпиаде присутствовал И.А. Иоголевич – Заслуженный учитель России. Его ученики из лицея № 31 города Челябинска на предыдущих Международных олимпиадах завоевали четыре золотые медали.

Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института. Кандидаты в нашу сборную были отобраны по результатам двух Всероссийских олимпиад (Воронеж, 2003 г. и Ярославль, 2004 г.), а также по результатам одного квалификационного (январь 2004 г.) и двух учебно-тренировочных сборов (июль 2003 г. и июль 2004 г.). На третьем заключительном сборе был окончательно определён состав команды из 5 школьников. Во время проведения сборов с ребятами работали преподаватели кафедры общей физики, а также студенты физтеха – победители Международных олимпиад прошлых лет. В общей сложности продолжительность всех сборов составила четыре с половиной недели. Это значительно меньше времени подготовки сборных команд стран, которые из года в год показывают наи-высшие результаты. По имеющимся сведениям период подготовки сборных команд этих стран длится от двух месяцев до полугодия. Следует также подчеркнуть, что члены сборных команд многих государств освобождаются от выпускных экзаменов. К сожалению, наши ребята в период, предшествующий третьему заключительному сбору, вынуждены готовиться к выпускным экзаменам в полном объёме, в ущерб самостоятельной подготовке к олимпиаде.

По итогам выступления на 35 Международной физической олимпиаде были отмечены 215 участников. Золотые медали получил 31 ученик, серебряные – 35 и бронзовые – 68. Кроме того, 81 участник был награжден грамотами.

Состязающимся были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное задание (20 баллов). Таким образом, каждый из участников олимпиады мог набрать 50 баллов. Набравший 39 баллов и выше получал золотую медаль, 34 и выше – серебряную, а 25 и выше – бронзовую. В этот раз на всю нашу команду не получилось ни одного «золота». Серебряными медалями наградили С. Глазырина (38,5 балла), И. Офёркина (36,8), И. Андреева (35,6) и Г. Речистова (34,3). Я. Лесничий набрал 31 балл и получил «бронзу». В неофициальном общекомандном зачёте Россия оказалась на 8-м месте (176,2 балла) после Китая, Ирана, Кореи, Белоруссии, Украины, США и Венгрии.

№	страна	золото	серебро	бронза	грамоты	сумма
1	Китай	5				222,1
2	Иран	3	1	1		196,7
3	Корея	4		1		193,9
4	Белоруссия	2	2	1		184,6
5	Украина	2	1	2		182,3
6	США	2	2	1		181,0
7	Венгрия	2	2		1	177,0
8	Россия		4	1		176,2
9	Тайвань	1	3	1		174,5
10	Индия	1	3	1		172,0
11	Таиланд	1	1	3		171,4
12	Румыния	1	2	2		170,7
13	Вьетнам		3	2		169,9

Выделилась группа стран, которые традиционно побеждают. Это азиатский Восток и США. Там талантливым школьникам оказывают реальную государственную поддержку, а главное – у них достаточно времени на подготовку.

Финансовые проблемы – не самые серьезные. Не всё определяется достатком страны. Скажем, Великобритания – очень богатое государство, но где у нас Англия? Даже в десятку лучших стран не вошла. Где Германия, Швеция? Их тоже нет среди лидеров. У нашей сборной другая проблема: не хватает времени.

Наши школьники приезжают на последние летние сборы буквально на следующий день после выпускных балов. Представляете, какая нервотрёпка? Готовиться к выпускным экзаменам (а в худшем случае – сдавать их досрочно), думать о предстоящей олимпиаде… В Китае кандидатов в национальную сборную на полгода селят при Шанхайском университете. А у нас – только трёхнедельные сборы. Что за это время успеешь? Их никто не освобождает от выпускных экзаменов в школах. Хотя все, кто входит в национальную сборную, имеют право быть зачисленными в любой профильный вуз без экзаменов. В этом году «олимпиадники» выбрали в основном Физтех – четверо и физфак МГУ – один.

Слева направо: Речистов Г., Глазырин С., Лесничий Я., Офёркин И., Андреев И.

Олимпиаду приветствует президент Кореи

Было бы намного легче, если бы Министерство образования и науки освобождало участников сборной (а они определяются задолго до олимпиады) от школьных экзаменов. Тогда то время, в которое одноклассники сдают выпускные экзамены, «сборники» могли бы посвящать самостоятельной подготовке к международным соревнованиям. А на сборах можно было бы делать упор на физические опыты, подготовку к экспериментальному туру.

Мы недобрали баллы на экспериментальном туре. Ни для кого не секрет, что в большинстве российских школ оборудование устаревшее, лабораторные работы по физике устраиваются нерегулярно. Мы в МФТИ, наконец, построили специализированную лабораторию для занятий со школьниками на сборах. Но уж больно мало времени смогли провести в ней ребята. Трёхнедельные сборы в Долгопрудном (за которые, кстати, новое Министерство науки и образования ещё не перечислило деньги преподавателям и пансионату) могут только совершенствовать уже имеющиеся навыки школьников, а далеко не все школьники умеют достаточно хорошо проводить физические опыты. В некоторых школах даже простейших осциллографов нет! А на олимпиаде ребятам иногда приходится работать с двухканальным осциллографом. В этом году в Поханге на экспериментальном туре олимпиады надо было исследовать «механический чёрный ящик» (который на самом деле не коробка, а запаянная с обеих сторон трубка). В него был запрятан металлический шарик, который крепится к торцам двумя пружинами разной жёсткости. Школьники должны были аккуратно, как лаборанты, без всякой фантазии провести эксперимент и построить необходимые графики. Но они не успели усвоить культуру оформления выкладок. С этим туром наша команда справилась хуже, чем с теорией.

... В этом году впервые в качестве отдыха между теоретическим и экспериментальным турами участникам предложили творческий конкурс. Надо было построить летательный аппарат с заданными техническими характеристиками. Их запускали под самый потолок в роскошном актовом зале ПосТеха – Поханского университета науки и технологии и следили, за какое время они опустятся с пятнадцатиметровой высоты. При довольно внушительном весе – более полукилограмма – наш аппарат продержался в воздухе почти пять с половиной секунд!

Теоретические задачи

Сопротивление «Пинг-понг»

Конденсатор состоит из двух параллельных пластин в форме кругов радиусом R, расположенных на расстоянии d ($d \ll R$) друг от друга (рис 1.1a). Верхняя пластина присоединена к источнику постоянного напряжения с потенциалом V, а нижняя пластина заземлена. Затем тонкий маленький диск массой m радиусом r ($r \ll R, d$) и пренебрежимо малой толщиной ($t \ll r$) помещают в центр нижней пластины (рис 1.1b). Пластины и диск, изготовленные из хорошо проводящего материала, находятся в вакууме. Всеми электростатическими краевыми эффектами и индуцированными зарядами, а также индуктивностью всей цепи и связанными с ней эффектами можно пренебречь. Диэлектрическая постоянная ε_0 считается известной.

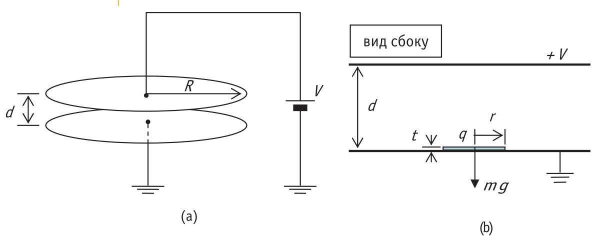


Рисунок 1.1 Схематический чертеж параллельных пластин конденсатора, подключенных к источнику постоянного напряжения, (a) и вид сбоку параллельных пластин с маленьким диском, помещённым внутри конденсатора (b). (Смотри подробное описание в тексте).

(a) [1.2 балла] Рассчитайте электростатическую силу F_p взаимодействия между пластинами, находящимися на расстоянии d, до помещения диска между ними (рис. 1.1a).

(b) [0.8 балла] Когда диск помещён на нижнюю пластину (рис. 1.1b), диск приобретает заряд q, пропорциональный напряжению V на конденсаторе: $q = \chi V$. Выразите χ через r, d и ε_0.

(c) [0.5 балла] Параллельные пластины конденсатора расположены перпендикулярно гравитационному полю g. Чтобы диск в первый раз поднялся вверх из исходного положения, необходимо приложить напряжение V, превышающее пороговое значение V_{th}. Выразите V_{th} через m, g, d и χ.

(d) [2.3 балла] При $V > V_{th}$ диск движется вверх-вниз между пластинами. (Предполагается, что диск движется строго вертикально без качания). Столкновения между диском и пластиной неупругие с коэффициентом восстановления η (V_{after}/V_{before}), где V_{before} и V_{after} – скорости диска соответственно до и после столкновения. Пластины закреплены неподвижно. После большого количества столкновений скорость диска сразу после очередного столкновения с нижней пластиной стремится к значению, которое назовём «скоростью в установившемся режиме» V_s. Величина V_s зависит от V по формуле:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$$

Выразите коэффициенты α и β через m, g, χ, d и η. Предполагается, что диск касается пластины одновременно всей поверхностью, так что полная перезарядка происходит мгновенно при каждом столкновении.

(e) [2.2 балла] В установившемся режиме средний по времени ток I через обкладки конденсатора при условии $qV \ll mgd$ может быть представлен в виде $I = \gamma V^2$. Выразите коэффициент γ через m, χ, d и η.

(f) [3 балла] При очень медленном уменьшении приложенного напряжения V существует критическое значение напряжения V_c, ниже которого ток скачком прекращает течь. Выразите V_c и соответствующий ему ток I_c через m, g, χ, d и η. Сравнив V_c с пороговым значением V_{th}, определенным в пункте (c), приближённо изобразите зависимости I от V (на листе ответов) при увеличении и при уменьшении V в пределах от $V = 0$ до $3V_{th}$.

Ответ

(a) При подключении к источнику между пластинами возникает однородное электростатическое поле, модуль напряжённости которого $E = \dfrac{V}{d}$. Так как это поле создаётся зарядами каждой из пластин и эти заряды равны между собой по модулю, то $E = E_u + E_d \Rightarrow E_u = E_d = \dfrac{E}{2} = \dfrac{V}{2d}$. Поле, создаваемое нижней пластиной, действует на верхнюю с силой $F_p = q_u E_d$. Заряды пластин $q_u = -q_d = CV$, где $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} = \dfrac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d}$ - ёмкость конденсатора, образованного этими пластинами. Сила взаимодействия между пластинами $\boxed{F_p = \dfrac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}}$.

(b) Заряд участка поверхности нижней пластины, на котором находится диск, полностью переходит на диск. Диск приобретает заряд

$$q = q_d \frac{r^2}{R^2} = -\frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d} V \frac{r^2}{R^2} = -\frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V. \quad \boxed{\chi = -\frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}}.$$

(c) Диск оторвётся от нижней пластины, если действующая на него со стороны электростатического поля сила превзойдет силу тяжести. Электростатическое поле будет действовать на диск с силой $F_e = |q| E_u = |\chi| V \dfrac{V}{2d} = |\chi| \dfrac{V^2}{2d}$. При пороговом значении приложенного напряжения $F_e = |\chi| \dfrac{V_{th}^2}{2d} = mg$. Пороговое значение напряжения $\boxed{V_{th} = \sqrt{\dfrac{2mgd}{|\chi|}}}$.

(d) После столкновения с нижней пластиной в установившемся режиме диск приобретает скорость v_s и заряд q. Перед ударом о верхнюю пластину его скорость v_{before}^{up} можно выразить из энергетических соображений:

$\frac{m\left(v_{before}^{up}\right)^2}{2}=\frac{mv_s^2}{2}-mgd+|q|V$. После удара о верхнюю пластину скорость диска $v_{after}^{up}=\eta v_{before}^{up}$, а его заряд равен $-q$. Скорость диска перед очередным ударом о нижнюю пластину v_{before}^{down}: $\frac{m\left(v_{before}^{down}\right)^2}{2}=\frac{m\left(v_{after}^{up}\right)^2}{2}+mgd+|q|V$. Скорость диска после удара о нижнюю пластину $v_{after}^{down}=\eta v_{before}^{up}=v_s$. Используя приведённые соотношения, выражаем $v_s=\sqrt{\frac{2|\chi|}{m}\cdot\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\cdot V^2+2gd\cdot\frac{\eta^2}{1+\eta^2}}$.

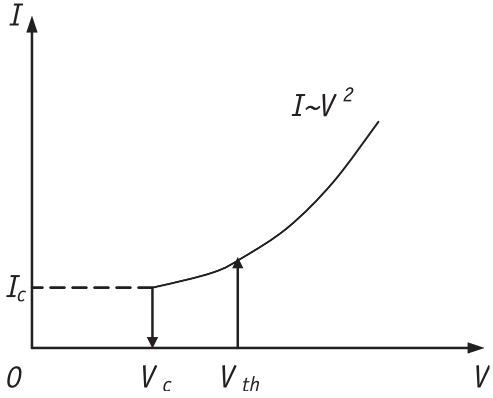
$\boxed{\alpha=\frac{2|\chi|}{m}\cdot\frac{\eta^2}{1-\eta^2};\beta=2gd\cdot\frac{\eta^2}{1+\eta^2}}$.

(e) Средний по времени ток через обкладки конденсатора $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$, где $\Delta q=2|q|$ – заряд, который переносит диск за один цикл (вверх – вниз) движения между пластинами, $\Delta t=t_{up}+t_{down}$ – время движения диска от нижней пластины до верхней и обратно. Так как и движение вверх, и движение вниз происходят с постоянными ускорениями, можно выразить средние скорости этих движений: $\overline{v_{up}}=\frac{v_s+v_{before}^{up}}{2}$; $\overline{v_{down}}=\frac{v_{after}^{up}+v_{before}^{down}}{2}$. Тогда $t_{up}=\frac{2d}{v_s+v_{before}^{up}}$ и $t_{down}=\frac{2d}{v_{after}^{up}+v_{down}^{before}}$.

Среднюю силу тока $I=\frac{2|q|}{t_{up}+t_{down}}=\frac{|q|}{d}\left(\frac{1}{v_s+v_{before}^{up}}+\frac{1}{v_{after}^{up}+v_{down}^{before}}\right)^{-1}$ найдём, используя выражения для $v_{before}^{up};v_{after}^{up};v_{before}^{down}$ из части (d). Учитывая, что $|q|V>>mgd$, $I=\sqrt{\frac{(1+\eta)}{(1-\eta)}\cdot\frac{|\chi|^3}{2md^2}}V^2$. $\boxed{\gamma=\sqrt{\frac{(1+\eta)}{(1-\eta)}\cdot\frac{|\chi|^3}{2md^2}}}$.

(f) Ток перестаёт течь, если кинетической энергии диска после удара о нижнюю пластину оказывается недостаточно, чтобы долететь до верхней пластины: $\frac{mv_s^2}{2}<mgd-|q|V$. Используя выражение для v_s, получим условие, которому должно удовлетворять V, чтобы ток прекратился: $V<\sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\cdot\frac{mgd}{|\chi|}}$. Критическое значение напряжения $\boxed{V_c=\sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\cdot\frac{mgd}{|\chi|}}<V_{th}}$! При таком напряжении скорость диска при подлёте к верхней пластине обращается в нуль. Тогда время движения вверх $t_{up}=\frac{2d}{v_s}$, время движения вниз $t_{down}=\frac{2d}{\left(v_s/\eta\right)}=\frac{2\eta d}{v_s}$.

Сила тока $I_c=\frac{2|q|}{2d(1+\eta)}v_s=\frac{|\chi|V_c}{d(1+\eta)}\sqrt{\frac{2|\chi|}{m}\cdot\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\cdot V_c^2+2gd\cdot\frac{\eta^2}{1+\eta^2}}$.



С учётом выражения для V_c,

$$\boxed{I_c = \frac{2\eta g}{(1+\eta)(1+\eta^2)}\sqrt{|\chi| m(1-\eta^2)}}.$$

График зависимости I от V при увеличении и уменьшении V будет иметь следующий вид:

Поднимающийся шар

Резиновый шар, наполненный гелием, поднимается в небо. Давление и температура атмосферного воздуха уменьшаются с высотой. В дальнейшем будем предполагать, что сферическая форма шара сохраняется, несмотря на прикреплённый к нему груз, и пренебрежём объёмом самой оболочки и груза. Будем также предполагать, что температура гелия внутри шара совпадает с температурой окружающего воздуха, и считать гелий и воздух идеальными газами. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К); молярные массы гелия M_H и воздуха M_A равны $M_H = 4{,}00 \times 10^{-3}$ кг/моль и M_A = 28,9 10 кг/моль соответственно. Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Часть А

(a) [1.5 балла] Предположим, что окружающий воздух имеет давление P и температуру T. Давление внутри шара выше наружного из-за упругих свойств оболочки. Пусть шар содержит n молей гелия и давление внутри него равно $P + \Delta P$. Определите выталкивающую силу F_B, действующую на шар, как функцию от Р и ΔP.

(b) [2 балла] В Корее в один из летних дней было найдено, что температура T воздуха на высоте z над уровнем моря задаётся соотношением $T(z) = T_0(1 - z/z^0)$ в диапазоне 0< z <15 км, где z_0 = 49 км и T_0 =303 К. Давление P_0 и плотность воздуха ρ_0 на уровне моря равны P_0 = 1 атм = $1{,}01 \times 10^5$ Па и ρ_0 = 1,16 кг/м^3 соответственно. В указанном диапазоне высот давление изменяется с высотой по закону

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta \tag{2.1}$$

Выразите постоянную η через величины z_0, ρ_0, P_0, и g; определите её значение с точностью до двух значащих цифр. Считайте ускорение свободного падения g постоянным, не зависящим от высоты.

Часть В

Когда резиновый шар (с радиусом r_0 в нерастянутом состоянии) раздувается до сферы радиуса r ($\geq r_0$), его оболочка из-за растяжения приобретает упругую энергию. В упрощённой теории упругая энергия U надутой сферической оболочки при постоянной температуре T описывается выражением

$$U = 4\pi r_0^2 kRT\left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right) \tag{2.2}$$

где $\lambda \equiv r/r^0$ (≥ 1) – коэффициент растяжения (по радиусу), а k – некоторая константа, выраженная в единицах моль/м^2.

(c) [2 балла] Выразите ΔP через параметры, входящие в выражение (2.2), и изобразите графически (на листе ответов) зависимость ΔP от λ.

(d) [1.5 балла] Постоянная величина k может быть определена через количество молей гелия, необходимых для надувания шара. При T_0 = 303 K и P_0 = 1,0 атм нерастянутый шар (при $r = r^0$) содержит n_0 = 12,5 молей гелия. Для раздувания шара до значения λ = 1,5 при неизменных температуре T_0 и внешнем давлении P_0 в нём должно находиться в общей сложности n = 3,6n_0 = 45 молей гелия. Выразите параметр a оболочки, определяемый как отношение $a = k/k_0$ (где $k_0 \equiv \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$), через n, n_0 и λ. Вычислите его значение с точностью до двух значащих цифр.

Часть C

Шар накачали на уровне моря как в пункте (d) (коэффициент растяжения по радиусу $\lambda = 1{,}5$, число молей гелия внутри $n = 3{,}6n_0 = 45$ молей, при температуре $T_0 = 303$ K и давлении $P_0 = 1{,}0$ атм $= 1{,}01 \times 10^5$ Па). Общая масса шара, включая газ, оболочку и груз, равна M_T = 1,12 кг. Такой шар начинает подниматься от уровня моря.

(e) [3 балла] Пусть этот шар поднялся до такой высоты z_f, на которой выталкивающая сила уравновешивается суммарной силой тяжести. Определите z_f и коэффициент растяжения λ_f на этой высоте. Рассчитайте их числовые значения с точностью до двух значащих цифр. Утечкой газа и боковым смещением из-за ветра пренебрегите.

Ответ

Часть A

(a) Выталкивающая сила $F_B = \rho g V$, где $\rho = \frac{pM_A}{RT}$ – плотность окружающего воздуха, $V = \frac{nRT}{(p+\Delta p)}$ – объём гелия. $\boxed{F_B = \frac{p}{(p+\Delta p)} nM_A g}$.

(b) Рассмотрим слой воздуха толщиной dz, расположенный на высоте z. Условие равновесия этого слоя $\rho(z) g dz = -dp$ или $-\frac{dp}{dz} = \rho(z) g$.

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\eta p_0}{z_0}\left(1 - z/z_0\right)^{\eta-1};$$

$$\rho(z) = \frac{p(z) M_A}{RT(z)} = \frac{p_0 M_A}{RT_0}\left(1 - z/z_0\right)^{\eta-1}.$$

Таким образом, $\frac{\eta p_0}{z_0} = \frac{p_0 M_A}{RT_0} g$ и $\boxed{\eta = \frac{M_A g z_0}{RT_0} \approx 5.5}$.

Часть B

(c) Позволим оболочке бесконечно медленно растягиваться. При увеличении её радиуса на dr силы давления (газа внутри оболочки и окружающего воздуха) совершат работу $\delta A = \Delta p \cdot 4\pi r^2 dr$. Энергия упругой деформации оболочки при этом возрастёт на $dU = \frac{dU}{dr} \cdot dr = 4\pi r_0^2 kRT\left(\frac{4r}{r_0^2} - \frac{4r_0^4}{r^5}\right)dr$.

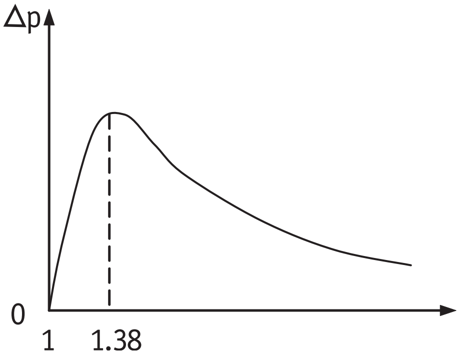


Рис. 2.1.

$\delta A = dU \Rightarrow \Delta p = \dfrac{4kRT}{r_0}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2\left(\dfrac{r}{r_0} - \dfrac{r_0^5}{r^5}\right)$. Искомая зависимость имеет вид $\boxed{\Delta p = \dfrac{4kRT}{r_0}\left(\lambda^{-1} - \lambda^{-7}\right)}$.

Эта зависимость имеет максимум при $\lambda = \sqrt[6]{7} \approx 1.38$. При $\lambda = 1$ $\Delta p = 0$. При $\lambda \gg 1$ $\Delta p \sim 1/\lambda$. Примерный график зависимости $\Delta p(\lambda)$ при $\lambda \geq 1$ приведён на рисунке 2.1.

(d) При $r = r_0$ давление гелия в шаре равно атмосферному $p_0 = \dfrac{n_0 RT_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$. При раздувании шара давление гелия $\left(p_0 + \Delta p\right) = \dfrac{nRT_0}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \Delta p = \dfrac{RT_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}\left(\dfrac{n}{\lambda^3} - n_0\right)$.

Используя выражение для Δp из пункта (c), выражаем $k = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{r_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}\cdot\dfrac{\left(n/\lambda^3 - n_0\right)}{\left(\lambda^{-1} - \lambda^{-7}\right)} = \dfrac{r_0 p_0}{4RT_0}\cdot\left(\dfrac{n/\left(n_0\lambda^3\right) - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}}\right)$. $\boxed{a = \dfrac{n/\left(n_0\lambda^3\right) - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}} \approx 0.11}$.

Часть C

(e) Условие равновесия шара на высоте z_f: $M_T g = F_B = M_A n g \dfrac{p_f}{p_f + (\Delta p)_f}$.

$$\frac{p_f + (\Delta p)_f}{p_f} = \frac{M_A n}{M_T}.$$

Так как количество гелия в шаре постоянно, то:

$$\frac{\left(p_0 + (\Delta p)_0\right)\lambda^3}{T_0} = \frac{\left(p_f + (\Delta p)_f\right)\lambda_f^3}{T_f} \Rightarrow \left(p_f + (\Delta p)_f\right) = \left(p_0 + (\Delta p)_0\right)\frac{T_f}{T_0}\left(\frac{\lambda}{\lambda_f}\right)^3.$$

$$\frac{p_f + (\Delta p)_f}{p_f} = \frac{p_0 + (\Delta p)_0}{T_0}\cdot\frac{T_f}{p_f}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda_f}\right)^3 = \frac{nM_A}{M_T}.$$

Из п.(c): $\Delta p_f = \dfrac{4kRT_f}{r_0}\left(\lambda_f^{-1} - \lambda_f^{-7}\right)$.

$$1 + \frac{(\Delta p)_f}{p_f} = 1 + \frac{4kRT_f}{r_0 p_f}\left(\lambda_f^{-1} - \lambda_f^{-7}\right) = \frac{nM_A}{M_T}.$$

$$\frac{T_f}{p_f} = \left(\frac{nM_A}{M_T} - 1\right)\frac{r_0}{4kR\left(\lambda_f^{-1} - \lambda_f^{-7}\right)} = \frac{nM_A}{M_T}\cdot\left(\frac{\lambda_f}{\lambda}\right)^3\cdot\frac{T_0}{p_0 + (\Delta p)_0}.$$

Учтём, что $\dfrac{4kRT_0}{r_0} = ap_0$, след., $\left(\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}\right) = \dfrac{p_0 + (\Delta p)_0}{ap_0}\left(1 - \dfrac{M_T}{nM_A}\right)\lambda^3$.

Т.к. $\lambda_f > \lambda$, где $\lambda = 1.5$, то $\left(\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}\right) \approx \lambda_f^2$.

$$(\Delta p)_0 = \frac{4kRT_0}{r_0}\left(\lambda^{-1} - \lambda^{-7}\right) \approx a p_0 \lambda^{-1}.$$

Т.о., $\boxed{\lambda_f \approx \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{M_T}{nM_A}\right)\lambda^3} \approx 2.14}$.

$$\frac{p_f}{T_f} = \frac{p_0}{T_0}\left(1-\frac{z_f}{z_0}\right)^{\eta-1} = \frac{p_0 + (\Delta p)_0}{T_0}\left(\frac{\lambda}{\lambda_f}\right)^3 \frac{M_T}{nM_A} \approx \frac{p_0}{T_0}\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_f}\right)^3 \frac{M_T}{nM_A}.$$

Из последнего выражения находим $\boxed{z_f \approx 11\,км}$.

Атомный зондирующий микроскоп

Атомный зондирующий микроскоп (АЗМ) является мощным исследовательским инструментом в области нанофизики. Движение датчика АЗМ регистрируется с помощью фотодетектора, принимающего отражённый луч лазера, как показно на рис. 3.1. Датчик закреплён на упругой горизонтальной пластинке и может колебаться только в вертикальном направлении. Его смещение z, зависящее от времени t, описывается уравнением

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F$$

где m – масса датчика, k – $m\omega_0^2$ коэффициент упругости пластинки, b – малый коэффициент затухания, удовлетворяющий условию $\omega_0 \gg (b/m) > 0$, F – внешняя сила, действующая на датчик со стороны пьезоэлемента.

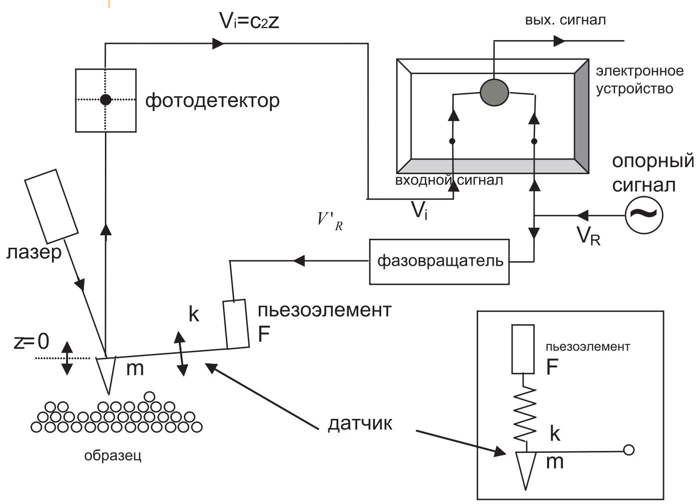


Рис. 3.1 Упрощённая схема атомного зондирующего микроскопа (АЗМ). В правом нижнем углу показана упрощённая механическая модель, описывающая принцип работы датчика и его связь с пьезоэлементом.

Часть А **(a)** [1.5 балла] Если $F = F_0 \sin \omega t$, то зависимость $z(t)$, удовлетворяющая уравнению (3.1), имеет вид $z(t) = A\sin(\omega t - \phi)$, где $A > 0$ и $0 \le \phi \le \pi$. Получите выражения для амплитуды A и тангенса фазы $\tan\phi$ через параметры F_0, m, ω, ω_0 и b. Найдите значения амплитуды A и фазы ϕ на резонансной частоте $\omega = \omega_0$.

(b) [1 балл] Электронное устройство, показанное на рис. 3.1, перемножает входной сигнал и опорный сигнал $V_R = V_{R0} \sin \omega t$, и выделяет в качестве выходного сигнала *только* постоянную составляющую произведения обоих сигналов. Допустим, входной сигнал задаётся формулой $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$, где V_{R0}, V_{i0}, ω_i, и ϕ_i являются заданными положительными константами. Найдите условие для ω (>0), при котором на выходе появляется отличный от нуля сигнал. Получите выражение для величины выходного сигнала (постоянной составляющей произведения) на заданной частоте ω.

(c) [1.5 балла] Пройдя через фазовращатель, опорный сигнал, напряжение которого зависит от времени по закону $V_R = V_{R0} \sin \omega t$, приобретает вид $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi / 2)$. Это напряжение V'_R подаётся на пьезоэлемент, который создаёт силу $F = c_1 V'_R$, приложенную к датчику. Затем фотодетектор преобразует смещение датчика z в напряжение $V_i = c_2 z$. В этих соотношениях c_1 и c_2 – известные константы, V_i – входной сигнал. Получите выражение для постоянной составляющей выходного сигнала при частоте опорного сигнала $\omega = \omega_0$.

(d) [2 балла] Малое изменение массы датчика Δm приводит к сдвигу его резонансной частоты на величину $\Delta\omega_0$, в результатае чего фаза входного сигнала ϕ на первоначальной резонансной частоте ω_0 испытывает сдвиг на величину $\Delta\phi$. Найдите изменение массы датчика Δm, при котором сдвиг фазы оказывается равным $\Delta\phi = \pi / 1800$, что типично для фазовых измерений. Значения физических параметров датчика следующие: $m = 1.0\ 10^{-12}$ кг, $k = 1{,}0$ Н/м и $(b / m) = 1.0\text{x}10^3$ с$^{-1}$. Используйте следующие приближенные формулы:
$(1 + x)^a \approx 1 + ax$ и $\tan(\pi / 2 + x) \approx -1/x$ (при $|x| \ll 1$).

Часть B Далее рассмотрите поведение устройства, включая все силы, действующие на датчик, описанные в части А, а также дополнительную силу со стороны образца (рис. 3.1), рассмотренную ниже.

(e) [1.5 балла] Считайте, что дополнительная сила $f(h)$, действующая на датчик со стороны поверхности образца, зависит только от расстояния h между концом датчика и поверхностью образца. Зная эту силу, можно найти новое положение равновесия датчика h_0. Вблизи этого положения h_0 можно приблизительно записать $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$, где c_3 – коэффициент, не зависящий от h. Найдите новую резонансную частоту колебаний датчика ω'_0 и выразите её через величины ω_0, m и c_3.

(f) [2.5 балла] Остриё датчика, несущее электрический заряд $Q = 6e$, движется горизонтально над поверхностью и проходит над электроном с зарядом $q = e$, расположенным (локализованным в пространстве) на некотором расстоянии под поверхностью образца. В ходе сканирования вблизи электрона максимальный сдвиг резонансной частоты $(= \omega'_0 - \omega_0)$ оказывается значительно меньше ω_0. Получите выражение для расстояния d_0 от острия датчика до локализованного электрона, при котором сдвиг частоты будет максимальным. Выразите это расстояние через параметры m, q, Q, ω_0, $\Delta\omega_0$ и постоянную закона Кулона k_e. Рассчитайте расстояние d_0 в нанометрах (1 нм = $1\text{x}10^{-9}$ м) для сдвига частоты $\Delta\omega_0 = 20$ с$^{-1}$.

Параметры датчика следующие: $m = 1.0\text{x}10^{-12}$ кг, $k = 1.0$ Н/м. Любыми поляризационными эффектами как для датчика, так и для образца следует пренебречь. Физические постоянные равны $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0\text{x}10^9$ Н·м^2/Кл^2, $e = -1.6\text{x}10^{-19}$ Кл.

Ответ

Часть А

(a) $z(t)=A\sin(\omega t-\varphi)$

$$\frac{dz}{dt}=A\omega\cos(\omega t-\varphi);\frac{d^2z}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t-\varphi)$$

С учётом

$$\sin(\omega t-\varphi)=\sin\omega t\cdot\cos\varphi-\cos\omega t\cdot\sin\varphi;\cos(\omega t-\varphi)=\cos\omega t\cdot\cos\varphi+\sin\omega t\cdot\sin\varphi$$

$$\left(-m\omega^2A\cos\varphi+bA\omega\sin\varphi+kA\cos\varphi\right)\sin\omega t+$$

$$+\left(m\omega^2A\sin\varphi+bA\omega\cos\varphi-kA\sin\varphi\right)\cos\omega t=F_0\sin\omega t$$

$$\begin{cases}-m\omega^2A\cos\varphi+bA\omega\sin\varphi+kA\cos\varphi=F_0\\ m\omega^2A\sin\varphi+bA\omega\cos\varphi-kA\sin\varphi=0\end{cases}$$

Т.к. $k=m\omega_0^2$, то $\boxed{tg\varphi=\dfrac{b\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}}$ и $\boxed{A=\dfrac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2+m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}}$.

При $\omega=\omega_0$: $\boxed{\varphi=\dfrac{\pi}{2}}$ и $\boxed{A=\dfrac{F_0}{b\omega_0}}$.

(b) $V_iV_R=V_{i0}V_{R0}\sin(\omega_it-\varphi_i)\sin\omega t=\dfrac{V_{i0}V_{R0}}{2}\left[\cos\left((\omega-\omega_i)t+\varphi_i\right)-\cos\left((\omega+\omega_i)t-\varphi_i\right)\right]$

Постоянная составляющая сигнала будет отлична от нуля только при $\boxed{\omega=\omega_i}$ и будет равна $\boxed{\dfrac{1}{2}V_{i0}V_{R0}\cos\varphi_i}$.

(c) Используем результаты, полученные в пункте (a) для A и φ при $\omega=\omega_0$. Учтём также, что $F=c_1V'_R=c_1V_{R0}\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Получим выражение для $V_i(t)$:

$$V_i=c_2z=c_2A\sin\left(wt+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=c_2\frac{F_0}{b\omega_0}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{c_2c_1V_{R0}}{b\omega_0}\sin\omega t$$

Откуда $V_{i0}=\dfrac{c_1c_2V_{R0}}{b\omega_0}$ и $\varphi_i=0$. Т.к. $\omega=\omega_i=\omega_0$, то постоянная составляющая сигнала $\boxed{\dfrac{c_1c_2}{2}\dfrac{V_{R0}^2}{b\omega_0}}$.

(d) Резонансная частота $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. При малом изменении массы датчика на Δm резонансная частота сдвинется на $\Delta\omega_0=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\Delta m=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_0}{m}\Delta m$.

$$tg\varphi=tg\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\varphi\right)=\frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}=\frac{b\omega}{m(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)}=$$

$$=\frac{b}{2m\Delta\omega_0}\approx-\frac{1}{\Delta\varphi}\Rightarrow\Delta\varphi=-\frac{2m\Delta\omega_0}{b}=\frac{\omega_0\Delta m}{b}.$$

$$\boxed{\Delta m=\frac{b\Delta\varphi}{\omega_0}=\left(\frac{b}{m}\right)\left(\frac{m}{\sqrt{k/m}}\right)\Delta\varphi\approx1.75\cdot10^{-18}\text{ кг}}.$$

Часть В

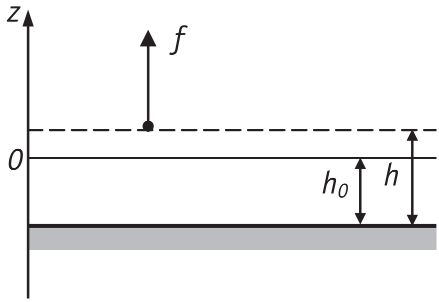


Рис. 3.2.

(e) $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0) = f(h_0) + c_3 z$.

Теперь уравнение колебаний датчика записывается так:

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F_0 \sin\omega t + f(h_0) + c_3 z$$

Появление постоянной силы $f(h_0)$ приводит только к смещению положения равновесия. А слагаемое $c_3 z$ можно учесть, введя новый коэффициент упругости $k' = (k - c_3)$. Тогда новая резонансная частота колебаний датчика $\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}}$.

(f) Сила взаимодействия датчика с электроном $f = k_e\frac{qQ}{r^2}$, где r – расстояние между датчиком и электроном. Сдвиг частоты будет максимальным, когда датчик проходит над электроном. В этом случае сила f направлена, как показано на рисунке 3.2. При небольшом смещении датчика в направлении оси z от положения равновесия приращение силы $\Delta f = -2k_e\frac{qQ}{r^3}\Delta r = c_3 z$. Так как $\Delta r = z$, а $r = d_0$, то $c_3 = -2k_e\frac{qQ}{d_0^3}$.

$$\Delta\omega_0 = \omega'_0 - \omega_0 = \omega_0\left(\sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} - 1\right) \approx -\frac{1}{2}\frac{c_3}{m\omega_0} = k_e\frac{qQ}{m\omega_0 d_0^3}.$$

$$\boxed{d_0 = \sqrt[3]{\frac{k_e qQ}{m\omega_0\Delta\omega_0}} \approx 41\,нм}.$$

Однажды на лекции

✦ Что больше – дельта большое или дельта маленькое?

✦ Природа хочет что-то нам сказать, а мы по своей глупости не понимаем.

✦ Сейчас вылезут пипополамы.

✦ Этот метод называется методом «тыка», или, по-научному, – «метод Монте-Карло».

✦ Эти вычисления я произведу в уме, так что вам несложно будет их проверить.

✦ Как известно, цена радиотелескопа, как и любого другого сооружения, пропорциональна кубу его высоты и лишь первой степени длины.

XIV ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА МФТИ, 2004-2005 ГОД.

Правила проведения.

Заочная физико-математическая олимпиада МФТИ рассчитана на учащихся 10-11 классов, но в ней могут участвовать и девятиклассники. Победители олимпиады пользуются правом преимущественного зачисления в МФТИ при прочих равных условиях.

Решение задач оценивается как успешное, а участник олимпиады признается её победителем с вручением диплома, если решено без ошибок не менее 5 любых задач из предложенных 12. При этом должна быть решена хотя бы одна задача по математике и одна задача по физике.

Решение задач оценивается как отличное, а участник олимпиады признаётся её лауреатом с вручением диплома лауреата, если решено без ошибок не менее 4 задач по физике и 4 задач по математике.

Решения задач должны быть представлены в тонкой ученической тетради, на обложке которой должна быть наклеена **ксерокопия удостоверения члена «Физтех-Академии»** или **анкета участника,** которая должна быть заполнена разборчивым почерком печатными буквами. На первой странице следует написать ответы ко всем задачам. Решение задач по математике пишутся в начале тетради, а только потом пишутся решения задач по физике. Задачи пишутся по порядку. Каждое решение начинается с новой страницы. Если задача не решена, следует оставить пустую страницу с номером задачи.

Решения задач высылаются по адресу: 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, МФТИ, «Физтех-Центр» – не позднее 20 февраля 2005 года.

По мере прохождения проверки, результаты олимпиады будут представлены на Интернет-Портале «Абитуриент» **www.abitu.ru.**

Оргкомитет
физико-математических
олимпиад МФТИ

Справки по телефонам:

«Физтех-Центр» (тел./факс)	(095) 408-64-36
Заочная физико-техническая школа	(095) 408-51-45
Приёмная комиссия	(095) 408-48-00

Анкета участника олимпиады

(заполняется **Заглавными печатными** буквами по образцу внизу страницы)

Фамилия

Имя

Рег. номер

Отчество

Класс

Школа

1. Домашний адрес:

Индекс

Номер региона

Область

Район

Город

Улица

Дом

Корпус

Квартира

Телефон (с кодом города)

Учитесь ли в ЗФТШ да нет

Номер ЗФТШ

2. Оценки решённых задач (математика + физика) :

М-1 М-2 М-3 М-4 М-5 М-6 М(Σ)

Σ

Ф-1 Ф-2 Ф-3 Ф-4 Ф-5 Ф-6 Ф(Σ)

ВНИМАНИЕ! В связи с машинной обработкой просьба использовать шариковую или перьевую ручку (или принтер). Цвет чернил, пасты (печати) – чёрный или синий. Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**,**	**.**	**-**	**;**	**/**	**"**

Номер региона: Белоруссия – 101, Украина – 102, Казахстан – 103, Молдавия -106

МАТЕМАТИКА

М1. Найдите наименьшее натуральное n такое, что число $(n+100)!$ содержит в конце на 2004 нуля больше, чем число $n!$ $(m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m)$.

М2. Параболы $П_1 : y = 2004x^2 + ax + b$ и $П_2 : y = -x^2 + cx + d$ (a,b,c,d не даны) касаются в точке K. Прямая параллельная оси Ох, пересекает $П_1$ в точках K и M, а прямая, параллельная оси Оу, пересекает параболы в точках M и N. В каком отношении делит отрезок MN общая касательная к параболам?

М3. Существует ли разносторонний треугольник такой, что биссектриса и высота, проведённые из одной вершины, делят его на три части, из которых можно составить треугольник, не равный исходному?

М4. Центр сферы радиуса $R=1$ расположен на расстоянии $\sqrt{3}$ от прямой l. Какой наименьший объём может иметь правильный тетраэдр ABCD, ребро AB которого лежит на прямой l, а прямая CD касается сферы в одной из точек отрезка CD?

М5. Найдите количество 2004-значных чисел, каждое из которых содержит все цифры, кроме нуля, и никакие две рядом стоящие цифры которых не являются одинаковыми.

М6. Ненулевые функции $f(x)$ и $g(x)$ определены при всех $x \in R$ и удовлетворяют равенству $f(x+y) + f(x-y) = f(x)g(y)$ при всех $x, y \in R$. Какое наименьшее значение может принимать функция $g(x)$?

Внимание: Во всех задачах ответ должен быть обоснован. В задаче № 5 ответ должен быть представлен в замкнутой форме (т.е. в виде выражения, не содержащего знаков $\sum$ – суммирования, многоточий и т.п.).

ФИЗИКА

Ф1. Гелий расширяется в процессе 1-2, в котором его давление пропорционально объёму, от температуры T до температуры $1{,}2T$. Затем гелий расширяется изобарически в процессе 2-3 до температуры $1{,}5T$. Найти отношение количеств теплоты, полученных газом в процессах 1-2 и 2-3.

Ф2. Шарик, висящий на упругой пружине, колеблется вдоль вертикали с периодом $T = 1$ с, двигаясь вблизи и перпендикулярно главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Изображение шарика в линзе колеблется с амплитудой $A = 2\,см$. Фокусное расстояние линзы F, шарик находится на расстоянии $3F/2$ от линзы. Найти максимальную скорость шарика.

Ф3. Найти ток (с указанием направления) через резистор с сопротивлением $8R$ сразу после замыкания ключа K. Параметры схемы даны на рисунке.

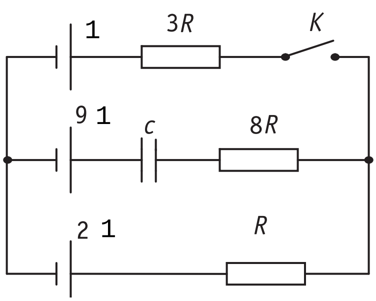


Рис. к Ф3

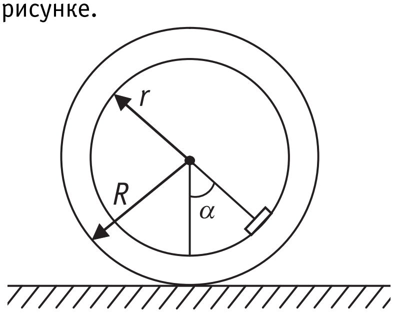


Рис. к Ф5

Ф4. Над наклонной плоскостью с углом наклона к горизонту α удерживают шарик. Шарик отпускают, и через время t_0 он ударяется о плоскость. Считая все удары шарика упругими, найти интервал времени между вторым и пятым ударами.

Ф5. Внутри камеры автомобильного колеса радиусом R находится небольшое сплющенное тело на расстоянии $r = 13R/15$ от оси колеса (см. рис.). Коэффициент трения скольжения между телом и камерой равен μ. 1) Найти максимальный угол α между вертикалью и радиальным направлением на тело, при котором тело сможет оставаться в покое относительно колеса, при неподвижном колесе. 2) При какой минимальной постоянной скорости автомобиля тело сможет оставаться неподвижным относительно колеса?

Ф6. Положительно заряженная частица массой m и с зарядом q, двигаясь перпендикулярно четырём проводящим сеткам, пролетела через них (см. рис.). Перед пролётом сеток на расстоянии от сеток, значительно большем из размеров, скорость частицы была V_0. Расстояние между сетками d, $2d$ и $3d$ намного меньше размеров сеток. К сеткам подсоединены источники с ЭДС 1, 31 и 51. Найти отношение скоростей частицы в точках M и N.

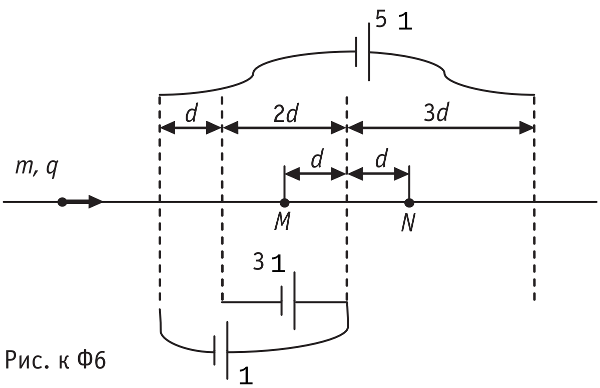


Рис. к Ф6

Однажды на лекции

✦ И учтите: это не какая-нибудь ерундовина, это самая могучая теорема анализа!

✦ Тензор вязких напряжений берется из феноменологических соображений, то есть с улицы.

✦ Не зная особенностей химической связи, вы не знаете интимной стороны химической реакции.

✦ Вместо того, чтобы думать, интегрируема функция или нет, надо просто взять ее и проинтегрировать.

✦ Когда говорят, что $z^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений, то это чудовищное преувеличение!

Варианты вступительных билетов в ВУЗы. 2004 год

Ивановский государственный университет

Физика

1. Два шарика массами 1 кг и 2 кг движутся навстречу друг другу со скоростями 1 м/с и 2 м/с соответственно. Определить изменение механической энергии шариков в результате абсолютно неупругого столкновения.

2. Температуру нагревателя идеальной тепловой машины увеличили в 2 раза, а температуру холодильника уменьшили на 40%. После этого КПД тепловой машины стал 88%. Определить начальное значение КПД машины.

3. При подключении к источнику эдс сопротивления 3 Ом сила тока в цепи равна 2,5 А, а при подключении сопротивления 4 Ом сила тока в цепи равна 2 А. Определить ток короткого замыкания источника.

4. Соленоид, состоящий из 500 витков провода, замкнут так, что полное сопротивление цепи равно 10 Ом. Какой заряд пройдёт по цепи при равномерном уменьшении магнитного потока в соленоиде от 10 мВб до 5 мВб?

5. По поверхности воды распространяется волна со скоростью 3 м/с. Поплавок, находящийся на поверхности воды, совершает 90 колебаний за 1 минуту. Определить длину волны.

6. Период полураспада радиоактивного изотопа равен 4 суткам. Определить отношение количества распавшихся ядер к количеству оставшихся ядер за 8 суток.

Математика

1. Решите неравенство $9\cos^2 x + tg^2 x \le 5$.

2. Решите систему
$$\begin{cases} x + 2y = 7; \\ x^2 - y^2 + 2xy + 2x + y = 3; \\ 2x + y \ge 3. \end{cases}$$

3. Решите уравнение
$$\sqrt{(x+3)(4x+1)} - \sqrt{(x+3)(x+2)} = \sqrt{(x+3)(2x-3)}.$$

4. Решите уравнение $\dfrac{\log_4\left(-\dfrac{x}{2}\right)}{\log_{16}(-x+8)} = 1.$

5. Найдите наибольшее из значений параметра a, при которых уравнение
$$\arccos(\,|25^x + 36^x + a\sqrt{5}\cdot 30^x\,| + 1) = 0$$
имеет решение.

6. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом и гипотенузой длины c. Все боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину и наклонены к плоскости основания под одинаковым углом. Найдите объём пирамиды.

Билеты письменного теста на собеседовании с медалистами

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=5; \\ 2x-\sqrt{y}=4. \end{cases}$$

2. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 2x+5\ge 0; \\ x-3\le 0; \\ x+1\ge 0. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $3^x=27\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}\le 0$.

5. Решите уравнение $x^4-5x^2+4=0$.

6. Решите неравенство $-2\le\log_3 x\le 3$.

7. Найдите координаты вершины параболы $y=x^2-4x+8$.

8. На координатной плоскости xOy область D задана системой неравенств
$$\begin{cases} x^2+y^2\le 25; \\ x^2+y^2\ge 9; \\ x\ge 0. \end{cases}$$
Найдите площадь области D.

9. Решите уравнение $ctg(4\cos x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Пусть $n\in N$. Может ли число $n^3-9n^2+27n+37$ быть простым? Дайте обоснование своему ответу.

Новосибирский государственный университет

Задача №1. Тело толкнули вверх вдоль ше-роховатой наклонной плоскости (см. рис. 1). При подъёме величина ускорения была равна a_1, при спуске – a_2. Найдите угол на-клона плоскости. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

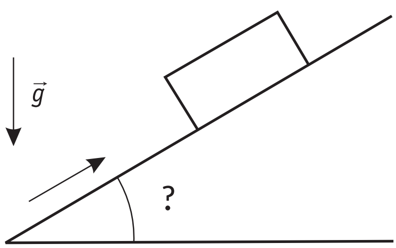


Рис. 1

Задача №2. Вертикально стоящий цилиндр с газом разделён поршнем массы m и сечения S на два отсека (см. рис. 2). Под действием собственного веса поршень медленно опускается. При этом давления в отсеках остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием газа по трубке пренебре-жи-мо малого объёма. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными, выше поршня – T_1, ниже – T_2 ($T_2>T_1$). Найдите давления газа в отсеках. Ускорение свободного падения $\vec{g}$, трением поршня о стенки пренебречь.

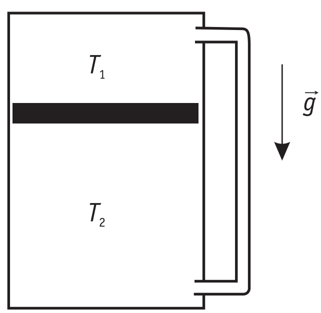


Рис. 2

Задача №3. Три параллельные проводящие пластины, площади S каждая, подключены к источнику с напряжением U как показано на рис.3. Расстояния от внешних пластин до средней равны d_1 и d_2, соответственно. Най-дите электрическую силу, действующую на среднюю пластину, если расстояния между пластинами много меньше их размеров.

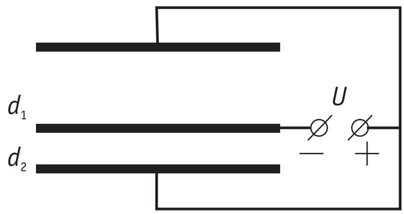


Рис. 3

Задача №4. Оцените среднюю мощность, развиваемую силой давления пороховых газов, действующей на пулю при выстреле.
Предполагается, что Вы хорошо представ-ляете явление, можете сами задать недос-тающие и необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

Задача №5. Сосуд со сливным отверстием вблизи дна заполняется водой. Из отвер-стия начинает бить струя воды, вначале попадающая в горловину колбы. По мере вытекания струя перестаёт попадать в гор-ловину и колба остаётся незаполненной (см. рис.5). Если сосуд, заполненный водой, закрыть пробкой с трубкой, открытой свер-ху и погруженной снизу в воду, то струя не уходит от горловины и наполняет колбу доверху (см. рис. 6). Объясните демонстрируемое явление.

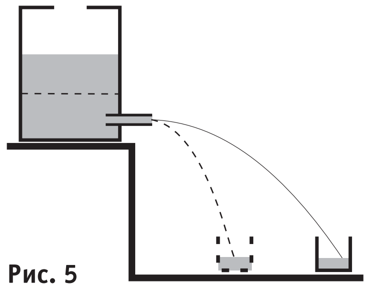


Рис. 5

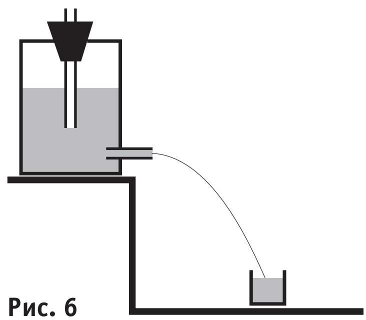


Рис. 6

Письменные вступительные экзамены в МФТИ

Математика

1. Решить неравенство $\log_7 \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1-4|x|}{|x|-7x^2} \le 0.$

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin\ 6x}{\sin\ 4x} = \dfrac{\cos\ 3x}{|\cos\ x|}.$

3. Четырёхугольник, один из углов которого равен $\arccos\ (3/5)$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{10}$ и описан около окружности радиуса 3. Найти площадь четырёхугольника и угол между его диагоналями.

4. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра C_1D_1 и параллельной прямой BD;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение.

$$\log_2\left(4^x + \log_2 a\right) = x.$$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = 4+z^2; \\ (z-2y)^2 = 3+x^2; \\ (z+x)^2 = 2+4y^2. \end{cases}$$

Ответы:

1. $-1 \le x \le -\dfrac{2}{7},\ \dfrac{2}{7} \le x \le 1.$

2. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + \pi(2k+1),\ k \in Z.$

3. $\dfrac{93}{2}; \arcsin\dfrac{31}{32}.$

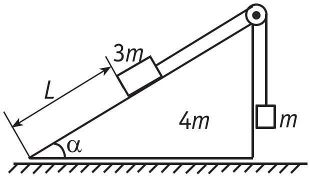
4. $\dfrac{7\sqrt{17}}{24}; 4-2\sqrt{2}.$

5. $a = \sqrt[4]{2},\ 0 < a \le 1.$

6. $\left(1; -\dfrac{7}{12}; \dfrac{5}{6}\right), \left(-1; \dfrac{7}{12}; -\dfrac{5}{6}\right).$

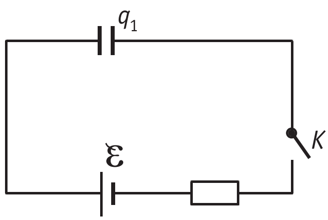
Физика

1. Бруски с массами m и $3m$ связаны лёгкой нитью, перекинутой через блок, укреплённый на клине с углом наклона к горизонту $\alpha\left(\cos\alpha = 7/9\right)$ и массой $4m$ (см. рис.). Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. Брусок с массой $3m$ удерживают неподвижно на расстоянии $L = 24$ см от края клина, а затем отпускают. В результате бруски и клин движутся поступательно, их скорости лежат в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится клин к моменту удара бруска с массой $3m$ о стол? К моменту удара другой брусок еще не достигает блока. Массой блока пренебречь.

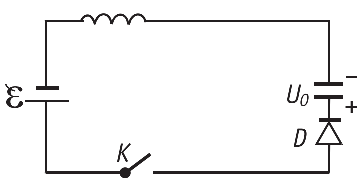


2. В закреплённой длинной гладкой горизонтальной трубе находятся два поршня с массами m_1 и m_2, между которыми в объёме V_0 находится при давлении P_0 ν молей идеального одноатомного газа, масса которого много меньше массы поршней. Наружное давление на поршни пренебрежимо мало. Первоначально удерживаемые поршни отпускают и в некоторый момент времени скорость поршня массой m_1 становится равной v_1. Полагая, что газ между поршнями всё время остается равновесным, определить его температуру в этот момент. Теплопроводностью и теплоёмкостью поршней и трубы пренебречь.

3. В электрической схеме, представленной на рисунке, две одинаковые проводящие пластины площадью S расположены на малом расстоянии d друг от друга. Обе пластины заряжены, причём на правой пластине находится положительный заряд q_1. 1) Найти начальный заряд левой пластины, если после замыкания ключа K батарея совершила работу A. 2) Какое количество теплоты выделилось в цепи после замыкания ключа K? Э.Д.С. батареи равна $\mathcal{E}$. Считать, что до и после замыкания ключа заряды (по модулю) проводов, резистора и источника пренебрежимо малы.



4. В схеме, приведённой на рисунке, при разомкнутом ключе K конденсатор ёмкостью $C = 30$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 4$ В. Индуктивность катушки $L = 0{,}3$ Гн, Э.Д.С. батареи $\mathcal{E} = 10$ В, D – идеальный диод. 1) Определить максимальный ток в цепи после замыкания ключа K. 2) Какое напряжение установится на конденсаторе после замыкания ключа K?



5. За тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположили плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы, на расстоянии $L = 4F/3$ от неё. При каких расстояниях между линзой и предметом, расположенным перед линзой, его изображение в системе линза-зеркало-линза будет прямым, а при каких перевёрнутым?

Ответы:

1. $\dfrac{7}{24}L = 7$ см.

2. $T = \dfrac{1}{\nu R}\left[P_0V_0 - \dfrac{m_1(m1+m2)v_1^2}{3m_2}\right].$

3. 1) $q_2 = q_1 - \dfrac{2A}{\mathcal{E}} + \dfrac{2\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}$; 2) $Q = \dfrac{A^2 d}{2\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}$.

4. 1) $I_{max} = (\mathcal{E} - U_0)\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 60\ mA$;

2) $U = 2\mathcal{E} - U_0 = 16$ В, полярность не изменится.

5. При $a > 30$ см изображение прямое, при $a < 30$ см – перевёрнутое.

МАТИ им. К.Э. ЦИОЛКОВСКОГО

1. Решить уравнение:
$\log_{3-2x} 4 + \log_{3-2x} 3 = 1.$

Ответ: $x = -9/2$.

2. Для изготовления партии деталей на первом станке требуется на 3 часа больше времени, чем на втором. За какое время можно изготовить партию деталей на каждом станке, если известно, что при работе двух станков одновременно она будет изготовлена за 6 часов 40 минут.
Ответ: $t_1 = 15, \quad t_2 = 12.$

3. Решить уравнение:

$$tg^2 x + ctg^2 x = \frac{8}{1+\cos 8x} - 2.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k;$

где $n, k \in$ Z.

4. Решить неравенство:
$$\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x^2+x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+4x-5}} < \frac{1}{\sqrt{6x-6}}.$$
Ответ: $]4;+\infty)$

5. При каких значениях параметра k уравнение
$$x^3 - 4x^2 - 3x + k = 0$$
имеет на интервале (1; 4) два решения?
Ответ: $k \in]12;18[$

6. В треугольнике *ABC* на стороне *AB* взята точка *D*, а на стороне *CD* – точка *K* так, что *AD*:*DB*=2:3 и *CK*:*KD*=5:4. Продолжение отрезка *AK* за точку *K* пересекает сторону *BC* в точке *M*. Найти отношение *CM*:*MB*.
Ответ: *CM*:*MB*=1:2.

Московская государственная академия приборостроения и информатики

1. Упростить выражение:
$\frac{1}{\sqrt{13}-3} + \frac{3}{\sqrt{13}-4}.$
Ответ: -1.

2. Вычислить значение выражения $x^2 + x + 2$ при *x*, равном корню уравнения
$\frac{8x+8}{x^2-1} + x + 5 = 0.$
Ответ: 8.

3. Вычислить значение выражения 8*x*-5y при x и y, являющихся решением системы уравнений $\begin{cases} 2x+3y=8; \\ 8y-5x=11. \end{cases}$
Ответ: -2.

4. Найти сумму всех корней уравнения:
$$(x^2-9)\sqrt{x^2+12x+35} = 0.$$
Ответ: -12.

5. Вычислить значение выражения $\frac{x-7}{x-5}$
при *x*, равном корню уравнения
$2\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 4.$ *Ответ:* 3.

6. Найти производное корней уравнения:
$$3^{(x-1)(2-x)} = \frac{1}{9}.$$
Ответ: 0.

7. Вычислить значение выражения
$7 - 2x - x^2$ при x, равном корню уравнения
$\log_3(6-x) + \log_3(x+4) = 2.$
Ответ: 4.

8. Пятый член геометрической прогрессии равен 27, восьмой член равен 729. Найти сумму первых четырёх членов этой прогрессии.
Ответ: 40/3.

9. Решить неравенство:
$\frac{5x+1}{x+5}\sqrt{9-4x} > \sqrt{9-4x}$.
Ответ: $(-\infty; \ -5) \cup \ (1; \ 9/4).$

10. Решить неравенство:
$$\frac{x^2+6x-7}{x+4} < 0.$$
Ответ: (-7; -4) $\cup$ (-4; 1).

11. Решить неравенство: $\log_{\sqrt{x}}(6-x) < 4.$
Ответ: (-∞; 0).

12. Дано: $tg 2\alpha = \frac{4}{3}, \ \pi < 2\alpha < \frac{2\pi}{2}.$ Вычислить: 2sin α + cos α .
Ответ: $\sqrt{5}.$

13. Найти число различных решений уравнения $\cos^2 2x + 2\sin^2 x = 1$ на промежутке $[0, \pi).$
Ответ: 5.

МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

1. Если сначала половину заказа выполнит один рабочий, а потом другую половину – второй рабочий, то весь заказ будет выполнен за 2 часа. Если же первый рабочий выполнит одну треть заказа, а потом оставшуюся часть выполнит второй, то весь заказ будет сделан за 2 часа 10 мин. За сколько времени каждый рабочий отдельно может выполнить весь заказ?
Ответ: 1,5 и 2,5 ч.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Ответ: $x=-\pi/3+k\pi,\ \ k\in Z.$

3. Решить уравнение:

$$\lg\left(x+\frac{3}{2}\right)=\lg\frac{1}{x}.$$

Ответ: $\{1/2\}$.

4. Решить неравенство:

$$\frac{4x}{1+x^2}<1+\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

Ответ: $x\in[0;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$f(x)=-x^2+7\cdot|x|-12$ на отрезке $[-4;\,3]$.

Ответ: $max\,f(x)=1/4$; $min\,f(x)=-12$.

6. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y+\ln\dfrac{|y|}{y}=x; \\ y+2(x+a)^2=x+2a+4, \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.
Ответ: $a\in[-1;\,2)\cup\{-2\}$,

$x=y=-a+\sqrt{a+2}$.

7. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой высота равна медиане основания. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AMT, если AT - боковое ребро пирамиды, а точка M лежит на медиане основания, не пересекающей это ребро?

Ответ: $\dfrac{27}{13\sqrt{13}}R^2$.

Московская государственная академия водного транспорта

1. Упростить выражение:

$$\frac{\sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt{y}}}{\sqrt[4]{x+y^{1/2}}}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{\sqrt[3]{y^4}}}{x^{1/2}-y}+\frac{\sqrt[6]{x}+y^{1/2}}{\sqrt[3]{x}+x^{1/6}\cdot\sqrt[3]{y}+y^{2/3}}\right)\cdot\left(\frac{x^{1/2}\cdot(y^{-1})^{1/3}}{x^{1/4}-\sqrt{y}}\right)^{-1}.$$

Ответ: $y^{1/3}$

2. Решить уравнение:

$$5x^3-6x^2-14x+3=0.$$

Ответ: $\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

3. Решить неравенство:

$$|x^2-4|\cdot(x^4-3x^2+2)\geq 0.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup[-1;1]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

4. Решить уравнение:

$$12^x+18^x=2\cdot 3^{3x}.$$

Ответ: 0.

5. Решить неравенство:

$$\log_{x^2}(7-6x)\leq 5^{\log tg\frac{x}{4}}.$$

Ответ: $(-\infty;-7]\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup\left]1;\dfrac{7}{6}\right[$.

6. Решить уравнение:

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \ \dfrac{\pi}{3}m;\ \ n,m\in Z.$

7. Две сферы радиуса 5 расположены в пространстве так, что расстояние между их центрами составляет 8. Определить длину окружности, по которой пересекаются сферы.
Ответ: 6π.

Московский государственный авиационный институт (технический университет)

1. Написать уравнение окружности с центром в точке *A* (1;2), проходящей через точку *B* (– 1; 3).

Ответ: $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

2. Решить уравнение: $\sin 2x \cdot \cos 2x = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \ \frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ k,n\in Z$.

3. В трапеции *ABCD* ($AD \parallel BC$) , биссектриса угла *BAD* проходит через точку *M*, которая является серединой стороны CD. Известно, что *AB* = 5 см, *AM* = 4 см. Найти длину отрезка *BM*.

Ответ: 3 см.

4. Решить неравенство:

$$\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{5+\log_{0,5} x}\le 3.$$

Ответ: $[1;\ 2]\cup[16;\ 32]$.

5. При каких значениях параметра *a* система уравнений

$$\begin{cases} x^3-3x=a; \\ a^2y^3-3y=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $[-\infty;-2[\cup]2;+\infty)$.

6. Найти угол между ребром AA' куба $ABCDA'B'C'D'$ и отрезком, соединяющим точку *A* с центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду $B'BCD$.

Ответ: $arctg\sqrt{6\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$.

Московский государственный строительный университет

1. На двух станках надо было обработать по 300 деталей. На первом станке в час обрабатывали на 5 деталей больше, чем на втором. Работу на первом станке начали на 1 час 30 минут позже, чем на втором, и, кроме того, на первом станке работу прерывали на 30 минут. Однако работа на обоих станках была выполнена к одному и тому же сроку. По сколько деталей в час обрабатывали на каждом станке?

Ответ: 1-й станок – 30 деталей,
2-й станок – 25 деталей.

2. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ единичные векторы, угол между которыми равен $60°$.

Ответ: Первая диагональ – $\sqrt{7}$;
вторая – $\sqrt{13}$.

3. Найти область определения функции:

$$y=\sqrt{\log_{0,7}\frac{3x-2}{x+6}}.$$

Ответ: $x\in\ \left]\frac{2}{3};4\right[$.

4. Решить уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)-\sin x=2\cos 3x.$$

Ответ: $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{6};\ \ x_2=(1+4k)\frac{\pi}{4};\ k\in Z$

5. Докажите возрастание функции $y=x^3-3x^2+3x+21$ на всей числовой прямой.

6. Решить уравнение:

$$32\cdot 4^x-9\cdot 3^x=3^{x+3}-2^{2x+4}$$

Ответ: $x=-1$.

7. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар радиуса *r* = 2см. Найти объём конуса.

Ответ: 24π см^3.

8. При каких значениях *b* уравнение

$$(2x+3)^2+(b-12)x+\left|4x^2-9\right|=0$$

имеет два различных корня?

Ответ: $(-\infty;-12[\cup]12;+\infty)$.

Московский государственный технический университет

1. Четвёртый член геометрической прогрессии $b_4 = 2$. Найти произведение $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 \cdot b_6$.

Ответ: 32.

2. Решить уравнение: $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

3. Решить уравнение: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}$.

Ответ: $x = 2\pi k;\ k \in Z$.

4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = -13, a = -4, a = -\frac{17}{9}$.

5. Решить неравенство: $\log_{x-3}(x^2-4x)^2 < 4$.

Ответ: $\left]3; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right[\cup \left]4; \frac{9}{2}\right[$.

Весёлый задачник

В окно с тротуара брошен камень со скоростью 5 метров в секунду. Оценить, с какой скоростью он вылетит назад.

Как с помощью фотоаппарата «Зенит» измерить высоту 5-этажного дома? (Указание. Длина фотопленки составляет 1,6 метра).

Пишут, что космические корабли будущего будут иметь мощность в сотни раз больше, чем мы можем себе представить. Оцените мощность будущих космических лайнеров.

Даны среднее арифметическое и среднее геометрическое. Найти золотую середину.

В одно ухо студента влетает 30 слов в минуту, а из другого вылетает 10. Найти: а) когда студент поумнеет; б) когда он получит Нобелевскую премию.

Определить, откуда берутся сделанные задания по теоретической физике.

Спортивного лидера искали по всему институту целые сутки. Из соотношения неопределённости оценить его энергию.

Найти давление в бутылке шампанского, если известно, что пробка, вылетев из комнаты шестого корпуса, разбила окно, попала в форточку третьего корпуса и, ударившись в ёлочный шарик, сообщила ему амплитуду.

В бассейн втекает вода из трубы А со скоростью C1 и вытекает из трубы В со скоростью C2. С вышки высотой H в бассейн прыгает студент. Рассмотреть все случаи.

Оценить постоянную Планка по пятибальной системе.

Заявка на изобретение движется снизу вверх. Оценить коэффициент размножения соавторов.

ЗА НАУКУ
ЕЖЕНЕДЕЛЬНАЯ ГАЗЕТА
Московского физико-технического института

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Приложение №1 к материалам комиссии Минобрнауки России (06.10.2004 г.)

Проект концепции модернизации дополнительного образования детей РФ до 2010 года

1.РОЛЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ В РАЗВИТИИ РОССИЙСКОГО ОБЩЕСТВА

Система дополнительного образования детей Российской Федерации в её новом качественном состоянии развивается на протяжении более 10 лет. Под «дополнительным» понимается мотивированное образование за рамками основного образования, позволяющее человеку приобрести устойчивую потребность в познании и творчестве, максимально реализовать себя, самоопределиться предметно, социально, профессионально, личностно. Отличительными чертами педагогики дополнительного образования детей являются:

♦ создание условий для свободного выбора каждым ребёнком образовательной области (направления и вида деятельности), профиля программы и времени её освоения, педагога;

♦ многообразие видов деятельности, удовлетворяющей самые разные интересы, склонности и потребности ребёнка;

♦ личностно-деятельностный характер образовательного процесса, способствующий развитию мотивации личности к познанию и творчеству, самореализации и самоопределению;

♦ личностно-ориентированный подход к ребёнку, создание «ситуации успеха» для каждого;

♦ создание условий для самореализации, самопознания, самоопределения личности;

♦ признание за ребёнком права на пробу и ошибку в выборе, права на пересмотр возможностей в самоопределении;

♦ применение таких средств определения результативности продвижения ребенка в границах избранной им дополнительной образовательной программы (вида деятельности, области знаний), которые помогли бы ему увидеть ступени собственного развития и стимулировали бы это развитие, не ущемляя достоинства личности ребёнка.

В соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 27 декабря 2000 г. № 1847-р Министерством совместно с другими заинтересованными федеральными органами исполнительной власти разработана и утверждена Межведомственная программа развития системы дополнительного образования детей.

Дополнительное образование детей по праву рассматривается как важнейшая составляющая образовательного пространства, сложившегося в современном российском обществе. Оно социально востребовано, требует постоянного внимания и поддержки со стороны общества и государства как образование, органично сочетающее в себе воспитание, обучение и развитие личности ребёнка, что нашло отражение в Национальной доктрине образования в Российской Федерации, Федеральной программе развития образования. В Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года подчёркнута важнейшая роль учреждений дополнительного образования детей как одного из определяющих факторов развития склонностей, способностей и интересов личностного, социального и профессионального самоопределения детей и молодёжи. Концепция модернизации дополнительного образования детей Российской Федерации (далее – Концепция) разработана в целях дальнейшего развития системы на период до 2010 года и взаимосвязана с Основными направлениями социально-экономической политики Правительства Российской Федерации.

1.1. Дополнительное образование детей и тенденции образовательной политики в России

Образовательный процесс в системе дополнительного образования детей строится в парадигме развивающего образования, обеспечивая информационную, обучающую, воспитывающую, развивающую, социализирующую, релаксационную функции. Отечественная система дополнительного образования детей располагает уникальными социально-педагогическими возможностями по развитию творческих способностей обучающихся в области научно-технической, художественной, эколого-биологической, спортивно-технической, физкультурно-спортивной, туристско-краеведческой, военно-патриотической, социально-педагогической, естественно-научной и другой образовательной деятельности.

Образовательная политика России, отражая общенациональные интересы в сфере образования и предъявляя их мировому сообществу, учитывает вместе с тем общие тенденции мирового развития, что обусловливает необходимость существенных изменений в дополнительном образовании детей:

♦ совершенствование системы дополнительного образования детей, призванной обеспечить необходимые условия для создания среды, способствующей расширенному воспроизводству знаний, развитию мотивации учащихся к самообразованию, развитию их творческих способностей, включения в социально полезную деятельность, профессионального и личностного самоопределения детей, самореализации и самовоспитания, адаптации их к жизни в обществе, формированию толерантного сознания, организации содержательного досуга и занятости;

♦ развитие межведомственного сотрудничества в целях обеспечения доступного и качественного образования, необходимого для обеспечения конкурентоспособности молодых людей в условиях рыночной экономики;

♦ создание условий сохранения единого образовательного пространства во взаимодействии дополнительного образования детей с различными уровнями образования;

♦ развитие нормативной правовой базы, приведение её в соответствие с изменениями в российском законодательстве;

♦ разработка образовательных программ нового поколения, направленных на развитие инновационной деятельности, информационных технологий;

♦ сохранение и укрепление кадрового состава, повышение их профессионального уровня с учётом современных требований, укрепление материально-технической базы, ресурсного обеспечения учреждений дополнительного образования.

1.2. Новые социальные требования к дополнительному образованию детей

Дополнительное образование детей опирается на следующие принципы: гуманизация, демократизация образовательного процесса, индивидуализация, педагогика сотрудничества. Важнейшим принципом дополнительного образования детей является добровольный выбор ребёнком предмета (вида) деятельности, педагога и объединения по интересам. Оно востребовано детьми, родителями, педагогами и обществом в целом, так как позволяет удовлетворять в условиях неформального образовательного процесса разнообразные познавательные интересы личности.

Учреждения дополнительного образования детей создают равные «стартовые» возможности каждому ребёнку, чутко реагируя на быстро меняющиеся потребности детей и их родителей, оказывают помощь и поддержку одарённым и талантливым обучающимся, поднимая их на качественно новый уровень индивидуального развития.

Каждое учреждение дополнительного образования детей должно стать организационно-методическим центром по развитию дополнительного образования детей для образовательных учреждений различных типов и видов своего микрорайона, муниципалитета, региона. Государственные учреждения дополнительного образования детей (федеральные, республиканские, краевые, областные) должны осуществлять координирующие, информационно-организационные, программно-методические функции поддержки развития дополнительного образования детей на уровне субъекта.

1.3. Состояние российской системы дополнительного образования детей и необходимость её совершенствования

По состоянию на 1 января 2004 года в Российской Федерации насчитывается 18 тыс. образовательных учреждений дополнительного образования детей различной ведомственной принадлежности, в том числе в системе образования – 8,9 тыс., системе культуры – 5,8 тыс., системе спорта – 1,1 тыс., общественных организаций – более 2 тыс. В них занимается свыше 10 млн. детей в возрасте от 5 до 18 лет (38,7 % от общего числа обучающихся).

Дополнительное образование детей по сути является практико-ориентированным. Оно в значительной мере осуществляется специалистами, профессионалами, «мастерами своего дела», что обеспечивает его разносторонность, привлекательность, уникальность и, в конечном счёте – результативность. Дополнительное образование детей – это «зона ближайшего развития» личности ребенка, которую он выбирает сам или с помощью взрослого в соответствии со своими желаниями и потребностями.

Гибкость дополнительного образования детей как открытой социальной системы позволяет обеспечить условия для формирования лидерских качеств, развития социального творчества, формирования социальных компетенций. Система дополнительного образования детей развивается на межведомственной основе и выступает гарантом поддержки и развития одарённых детей.

Затраты бюджетов всех уровней на дополнительное образование детей являются долгосрочными инвестициями в будущее развитие российского общества и государства, кадровый потенциал интеллектуального, научно-технического, творческого и культурного развития общества; безнадзорность и профилактику правонарушений несовершеннолетних, других асоциальных проявлений в детской и подростковой среде.

В учреждениях дополнительного образования детей более эффективно внедряются социально-педагогические модели деятельности, поскольку традиции, стиль и методы работы этих учреждений максимально учитывают особенности социума. Следствием этого является накопление детьми опыта гражданского поведения, основ демократической культуры, самоценности личности, осознанного выбора профессии, получение квалифицированной помощи по различным аспектам социальной жизни, что влияет на социальную адаптацию детей и молодёжи к изменяющимся условиям жизни.

1.4. Цели и основные задачи модернизации дополнительного образования детей

Цель модернизации дополнительного образования детей состоит в создании условий и механизма устойчивого развития системы дополнительного образования детей в Российской Федерации; обеспечении современного качества, доступности и эффективности дополнительного образования детей на основе сохранения лучших традиций внешкольного воспитания и дополнительного образования по различным направлениям образовательной деятельности.

На достижение цели направлено решение следующих взаимосвязанных задач:

♦ совершенствование законодательной базы в части дополнительного образования детей, приведение нормативного правового обеспечения системы в соответствие с российским законодательством;

♦ сохранение и развитие сети учреждений дополнительного образования детей;

♦ обеспечение государственных гарантий доступности и равных возможностей получения обучающимися дополнительного образования, достижение эффективности и качества дополнительного образования детей;

♦ сохранение единого образовательного пространства на основе преемственности содержания основного и дополнительного образования детей;

♦ сохранение межведомственного характера системы дополнительного образования детей;

♦ совершенствование содержания, организационных форм, методов и технологий дополнительного образования детей;

♦ создание и развитие новых информационных технологий, включающих телекоммуникационные проекты и дистанционное обучение в учреждениях дополнительного образования детей;

♦ совершенствование системы государственной аттестации и аккредитации учреждений дополнительного образования детей;

♦ гарантированное выделение средств из бюджетов всех уровней на материально-техническое обеспечение деятельности учреждений дополнительного образования детей;

♦ разработка и утверждение блока ресурсного обеспечения дополнительного образования детей в соответствии с направленностью образовательных программ;

♦ повышение социального статуса и профессионального совершенствования педагогических и руководящих кадров системы дополнительного образования детей, поддержка Всероссийского конкурса педагогов дополнительного образования «Сердце отдаю детям»;

♦ разработка социально-экономических мер нормативного правового регулирования привлечения внебюджетных средств учреждениями дополнительного образования детей;

♦ развитие дополнительного образования детей как открытой государственно-общественной системы на основе распределения ответственности между субъектами образовательной политики и повышения роли всех участников образовательного процесса – обучающихся, педагогов, родителей.

2.ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МОДЕРНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ДОПОЛПИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ

2.1. Обеспечение государственных гарантий доступности дополнительного образовании детей

Конституция Российской Федерации гарантирует права граждан на образование. Правительство Российской Федерации осуществляет меры по их реализации, в том числе и в дополнительном образовании детей.

В их числе:

♦ создание условий для творческого развития личностных потребностей детей в образовании;

♦ сохранение приоритета бесплатности дополнительного образования детей, равного доступа детей к дополнительному образованию;

♦ сохранение и развитие сети учреждений дополнительного образования детей, развитие дополнительного образования детей в общеобразовательных учреждениях;

♦ разработка механизма внеконкурсного поступления в ВУЗы обучающихся – победителей всероссийских конкурсов и соревнований;

♦ создание единого информационного поля в системе дополнительного образования детей, мониторинг состояния системы дополнительного образования детей;

♦ расширение взаимодействия основного и дополнительного образования в рамках реализации профильного обучения;

♦ обеспечение сельским детям равных возможностей в получении дополнительного образования, создание на базе сельских школ детских творческих объединений различной направленности, внедрение новейших информационных технологий для дистанционного обучения и реализации коллективных телекоммуникационных проектов;

♦ расширение возможностей получения дополнительного образования для детей с ограниченными возможностями здоровья;

♦ обеспечение социально-педагогической, психолого-педагогической поддержки детей «группы риска» через развитие клубных объединений по месту жительства, программы каникулярного отдыха и занятости в системе дополнительного образования детей.

2.2. Создание условий дли повышения качества дополнительного образования детей

Дополнительное образование детей осуществляется круглогодично. В каникулярный период в его рамках организуются профильные лагеря и школы, экспедиции и поисковые отряды, самостоятельная исследовательская, творческая деятельность обучающихся. Дополнительное образование детей должно проходить в максимально комфортных для развития личности условиях. Для создания необходимых условий достижения современного качества дополнительного образования детей предусматривается:

♦ обновление содержания на основе разработки научных основ организации образовательного процесса в учреждениях дополнительного образования детей;

♦ регулярное проведение всероссийских конкурсов авторских образовательных программ;

♦ экспертиза программно-методического обеспечения, разработка программ нового поколения и их экспериментальная проверка;

♦ активизация долгосрочных дополнительных образовательных программ, предназначенных для детей среднего и старшего школьного возраста;

♦ создание и функционирование федеральных экспериментальных площадок по отработке вариативных моделей развития учреждений дополнительного образования детей;

♦ разработка механизма включения в перечень экзаменов по выбору за курс основной средней школы итогов реализации программ дополнительного образования детей соответствующей направленности;

♦ развитие методической службы учреждений дополнительного образования детей;

♦ разработка программы «Основные направления информатизации системы дополнительного образования детей»;

♦ обеспечение государственной поддержки и развития одарённых детей.

2.3. Создание условий для повышения качества профессиональной подготовки педагогов дополнительного образования детей

Профессионализм педагога – это результат индивидуальной, целенаправленной работы над собой, постоянное повышение своего научно-методического потенциала. Современный педагог дополнительного образования должен быть, прежде всего, направленным на детей, обладать коммуникативными качествами, эмпатийностью, стремиться к партнёрским отношениям со своими воспитанниками; владеть знаниями, достаточными для разработки авторской образовательной программы; умением использовать в своей деятельности разнообразные педагогические средства и приёмы, инновационные технологии; владеть техникой исследовательской работы, её организации и анализа.

В учреждениях дополнительного образования детей сегодня работает около 440 тыс. руководящих и педагогических кадров, в том числе в системе образования – около 300 тыс. педагогов дополнительного образования, педагогов-психологов, социальных педагогов, педагогов-организаторов, методистов. За последние три года значительно возросло число педагогических работников с высшим образованием, имеющих высшую и первую квалификационные категории.

Меры, направленные на повышение профессионального уровня педагогов дополнительного образования призваны способствовать модернизации системы дополнительного образования детей. Приоритетными из них являются:

♦ активизация и актуализация подготовки выпускников средних профессиональных образовательных учреждений Российской Федерации по специальности «Педагогика дополнительного образования», разработки и утверждения дополнительной квалификации «Педагогика дополнительного образования» для высших профессиональных образовательных учреждений;

♦ разработка государственного заказа на повышение квалификации педагогических работников учреждений дополнительного образования детей;

♦ создание межведомственной системы подготовки, переподготовки и повышения квалификации руководящих и педагогических кадров;

♦ разработка государственных требований к программам дополнительного профессионального образования в области дополнительного образования детей для преподавателей институтов повышения квалификации работников образования всех уровней;

♦ планирование в бюджетах всех уровней финансовых средств на повышение квалификации педагогических работников системы дополнительного образования детей;

♦ создание виртуальной и электронной библиотеки учебно-методической литературы для педагогов дополнительного образования детей, включающей научную, учебно-методическую и справочную литературу, периодические издания.

2.4. Формирование эффективных экономических отношений в дополнительном образовании детей

Важными элементами формирования эффективных экономических отношений в дополнительном образовании детей являются:

♦ разработка рекомендаций по методике расчёта нормативного финансирования и материально-технического обеспечения с учётом направленности дополнительных образовательных программ, широкое использование рекомендаций в практике работы;

♦ выделение средств из бюджетов всех уровней на приобретение материалов, инструментов, лабораторного, компьютерного оборудования, снаряжения;

♦ актуализация опыта многоканального финансирования учреждений дополнительного образования детей;

♦ поддержка учреждений дополнительного образования детей через участие в реализации федеральных целевых программ на условиях софинансирования бюджетов всех уровней.

2.5. Управление развитием системы дополнительного образовании детей

Важнейшая задача и одно из приоритетных направлений модернизации системы дополнительного образования детей – совершенствование управления, создание эффективной системы статистики и мониторинга дополнительного образования детей. В числе первоочередных мер, направленных на развитие управлением системы дополнительного образования детей:

♦ изучение и обобщение опыта органов управления образованием субъектов Российской Федерации по реализации региональных требований к условиям функционирования учреждений дополнительного образования детей;

♦ разработка и внедрение механизмов материального и морального стимулирования учреждений по результатам аттестации и аккредитации, а также педагогических и руководящих работников, добившихся высоких результатов в своей работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация концепции модернизации развития системы дополнительного образования детей призвана способствовать:

♦ позитивным изменениям, направленным на реализацию прав ребёнка, улучшение положения детей, социально-экономическую защищённость семьи;

♦ повышению эффективности профилактики асоциальных проявлений среди детей и подростков, формированию здорового образа жизни;

♦ обеспечению доступности, равных возможностей в получении дополнительного образования детей на основе государственных гарантий;

♦ увеличению удельного веса детей, обучающихся по программам дополнительного образования с 37,8 до 50%;

♦ увеличению доли одарённых детей в различных областях знаний и творческой деятельности, которым оказана помощь и поддержка со стороны государства, от 1,8 до 4% (от общей численности детей от 7 до 14 лет);

♦ созданию современной законодательной базы, нормативного правового обеспечения, разработке механизмов развития системы дополнительного образования детей;

♦ обеспечению роста социального статуса, улучшению качественного состава педагогических и руководящих кадров системы дополнительного образования детей в Российской Федерации;

♦ функционированию системы дополнительного образования детей в режиме устойчивого бескризисного развития.