



### **Чивилёв Виктор Иванович**

*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ). Заслуженный работник высшей школы, заместитель председателя научно-методического совета Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.*

# **Оценка высоты подъёма игрушечной водяной ракеты**

В статье рассказано о запусках игрушечной водяной ракеты и способах оценки расчётом высоты подъёма ракеты при вертикальных пусках.

## **1. Введение**

Прошедшим летом, находясь в гостях, мне довелось участвовать с детьми моих друзей в запусках игрушечной водяной ракеты (рис. 1).

Игрушка была куплена через интернет-магазин умных развлечений «Семь пядей» ([www.7pd.ru](http://www.7pd.ru)).



Рис. 1. Приведение в действие дистанционного пускового механизма

Ракета приводилась в движение струёй воды, выбрасываемой через

сопло сжатым воздухом, накачанным в корпус ракеты насосом (рис. 2).



Рис. 2. В ракету на пусковой установке накачивается воздух

В зависимости от массы налитой в ракету воды и давления воздуха в ней ракета при вертикальных пусках поднималась на разные высоты. В некоторых случаях она поднималась выше 14-этажного дома, что тут же вызывало многочисленные и разнородные комментарии собравшихся маленьких и больших зрителей. Один мальчик пяти-шести лет никак не хотел уходить, несмотря на обещание мамы дать ему посмотреть дома фильм не только со стрельбой ракетами, но и со стрельбой из танков и пушек. По-видимому, быть свидетелем или участником запуска «живой» ракеты оказалось более интересным занятием, чем пассивный просмотр фильма о пуске ракет на экране телевизора или монитора компьютера.

## 2. Конструкция ракеты и пускового устройства

Длина ракеты 46 см. Масса без воды 120 г. Корпус ракеты с внутренним объёмом 0,6 литра выполнен из прозрачного пластика. На нос ракеты насаживается съёмная головная часть из мягкой резины, что предохраняет ракету от разрушения при падении. Это ещё и более безопасно. В хвостовой части к корпусу ракеты привинчивается реактивное сопло с внутренним диаметром отверстия 8 мм. Съёмные стабилизаторы сделаны из лёгкой пористой резины.

Меня же кроме эффектного зрелища заинтересовал ряд вопросов. Можно ли и как простыми расчётами оценить высоту подъёма ракеты при вертикальном запуске? От чего и как зависит высота подъёма? При каком соотношении масс ракеты и налитой воды при фиксированном избыточном давлении воздуха в ракете высота подъёма будет максимальной?

Последний вопрос возник потому, что у окружающих было желание увидеть высокий запуск. Существование условий для максимальной высоты стало совсем очевидным, когда все увидели, что очень малая и очень большая масса воды, залитой в ракету, приводила к подъёму всего на несколько метров. Да и в инструкции к ракете было написано, что наилучшие условия полёта обеспечиваются при заполнении корпуса ракеты водой на  $1/4$  или  $1/3$  объёма. Что понимать под словом «наилучшие», однако не расшифровывалось.

Для ответа на возникшие вопросы разумно сначала кратко сказать о конструкции и параметрах ракеты, а затем, выделив основные физические явления, вывести необходимые зависимости и произвести расчёты.

Ракета устанавливается на пусковой установке и удерживается за сопло специальными зажимами. Пусковая установка закрепляется винтами на платформе размером  $20 \times 30$  см. При нажатии рукоятки дистанционного пускового механизма (длина троса 80 см) зажимы освобождают сопло ракеты, и она может полететь.

Пусковая установка позволяет регулировать угол запуска. Воздух в ракету, предварительно заполненную частично водой, накачивается

прилагаемым к комплекту небольшим ножным насосом через воздушный клапан на пусковом устройстве и сопло. Этим насосом можно накачивать шины автомобиля, и наоборот – любым автомобильным на-

сосом можно накачать воздух в ракету. В инструкции рекомендуется заполнять ракету водой не более чем на 1/3 объёма и накачивать воздух до давления 2-5 атмосфер.

### 3. Оценка расчётом высоты подъёма ракеты

Пусть ракета массой  $M$  заполнена частично водой массой  $m$  (рис. 3). Для численной оценки высоты подъёма ракеты возьмём следующую упрощённую модель процесса запуска. Будем считать, что вся вода выбрасывается через сопло одновременно. Пусть скорость воды  $u$  (рис. 4). Если ракета заполнена водой не более чем на 1/3-1/4 объёма, то можно считать, что добавочное давление воздуха в процессе выталкивания воды изменяется мало и остаётся равным начальному добавочному давлению  $P$ , показываемому манометром насоса. Кстати, давление сжатого в ракете воздуха равно сумме  $P$  и атмосферного давления  $P_0$ , где  $P_0$  – атмосферное давление.

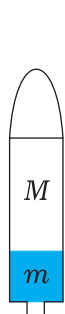


Рис. 3



Рис. 4

После выброса воды ракета приобретает скорость  $v$ . По закону сохранения импульса

$$mu = Mv.$$

Дополнительной скоростью, приобретаемой ракетой из-за выброса оставшегося сжатого воздуха, можно пренебречь, поскольку его масса в реальных запусках значительно меньше массы воды. Это подтверждается и проведёнными пусками ракеты без воды, когда она поднималась всего на несколько метров.



По закону сохранения энергии работа  $A$  над водой воздуха, находящегося внутри и снаружи ракеты, равна кинетической энергии воды и ракеты:

$$A = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}.$$

Работа

$$A = PV_{\text{в}}, \quad (1)$$

где  $V_{\text{в}} = m/\rho$  – объём воды плотностью  $\rho$ . Из записанных уравнений находим

$$v^2 = \frac{2Pm^2}{\rho M(M+m)}.$$

Высота подъёма ракеты

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{Pm^2}{\rho g M(M+m)}. \quad (2)$$

Обозначим для удобства отношение масс воды и ракеты через  $x$ :

$$x = \frac{m}{M}.$$

Отношение добавочного давления  $P$  к атмосферному давлению  $P_0$  обозначим через  $n$ :

$$n = \frac{P}{P_0}.$$

Заметим, что  $n$  численно совпадает с числом атмосфер, показываемых манометром насоса в конце накачивания воздуха в ракету.

Теперь (2) можно переписать в виде

$$H = \frac{P_0}{\rho g} n \frac{x^2}{x+1}. \quad (3)$$

#### 4. Более точная оценка расчётом высоты подъёма ракеты

Учтём хотя бы частично уменьшение давления в сжатом воздухе при выталкивании воды. Пусть внутренний объём ракеты равен  $V_p$ , а добавочное давление воздуха в ракете в конце процесса выталкивания воды равно  $P_1$ . В процессе выталкивания воды объём сжатого воздуха увеличится от  $V_p - V_B$  до  $V_p$ , а давление (полное) уменьшится от  $P_0 + P$  до  $P_0 + P_1$ . Считая воздух идеальным газом и не учитывая уменьшения его температуры, можно записать по закону Бойля–Мариотта:

$$(P_0 + P)(V_p - V_B) = (P_0 + P_1)V_p.$$

Работу воздуха над водой можно взять равной

$$A = \frac{P + P_1}{2} V_B.$$

Подставив в (3)  $P_0 = 10^5$  Па,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, получим расчётную формулу для высоты подъёма ракеты  $H$  в метрах:

$$H = 10n \frac{x^2}{x+1}. \quad (4)$$

Оценим по формуле (4) высоту подъёма при  $x = 1,5$  и  $n = 4$ , что соответствует массе воды  $m = 180$  г при массе ракеты  $M = 120$  г и давлении (добавочном) накачанного в ракету воздуха  $P = 4$  атм. Получаем  $H = 36$  м. При  $x = 2$  ( $m = 240$  г) и  $n = 4$  ( $P = 4$  атм) получится  $H = 53$  м.

Расчёт по формуле (4) дал близкие к реальному, но немного завышенные значения высоты прежде всего из-за того, что давление сжатого воздуха не остаётся постоянным в процессе выталкивания воды, а уменьшается. Из-за этого будет меньше работа воздуха над водой и, соответственно, меньше скорость ракеты и высота её подъёма.

Из последних двух равенств находим более точное выражение для работы, чем выражение (1):

$$A = PV_B - \frac{1}{2}(P_0 + P) \frac{V_B^2}{V_p}.$$

Теперь вместо формул (2) и (4) получаем более точные формулы для высоты подъёма ракеты:

$$H = \frac{Pm^2}{\rho g M(M+m)} - \frac{P_0 + P}{2\rho g} \cdot \frac{m^2}{M(M+m)} \cdot \frac{m}{\rho V_p}, \quad (5)$$

$$H = 10n \frac{x^2}{x+1} - (n+1) \frac{x^3}{x+1}. \quad (6)$$

Вторые слагаемые в формулах (5) и (6) можно рассматривать как поправки к формулам (2) и (4).

Оценка по формуле (6) высо-

ты  $H$  подъёма ракеты при  $x=1,5$  и  $n=4$  даёт  $H=29$  м вместо 36 м по формуле (4), а при  $x=2$  и  $n=4$  даёт  $H=40$  м вместо 53 м.

В таблице приведены результаты расчётов высоты  $H$  подъёма ракеты по формуле (4) и через косую черту по более точной формуле (6). Расчёт выполнен для различных значений  $x$  и  $n$ . Результаты расчётов хорошо согласуются с наблюдавшимися высотами подъёма ракеты.

Следует отметить, что формулы (4) и (6) являются весьма прибли-

жёнными формулами и дают при давлениях сжатого воздуха 2-4 атмосферы удовлетворительные результаты только тогда, когда ракета заполнена водой менее чем наполовину. Например, при почти полном заполнении ракеты водой сжатый воздух, расширившись и достигнув атмосферного давления, перестаёт дальше расширяться и выталкивать воду. В этом случае формулы (4) и (6) будут неверны совсем, т. к. они выводились в предположении, что вся вода вытесняется из ракеты.

Таблица

		x, отношение массы воды к массе ракеты				
		0,5	1	1,5	2	3
n, отношение добавочного давления к атмосферному давлению (показания манометра насоса в атмосферах)	2	3,3/3,1	10/8,5	18/14	27/19	45/25
	3	5/4,7	15/13	27/22	40/29	67/40
	4	6,7/6,3	20/17,5	36/29	53/40	90/56

Попытка исследовать в (4) и (6) зависимость  $H$  от  $x$  при заданном  $n$  для нахождения максимальной высоты  $H$  тоже может привести к неверным выводам. Действительно, исследование (6) с помощью производной для  $n=4$  приводит к выводу, что максимальная высота достигается при  $x=4,34$ , что соответствует массе воды  $m=520$  г. Вода с такой массой заполняет ракету на 87%, и не вся вода будет вытолкнута сжа-

тым воздухом. Формула (6) в этом случае неприменима, и полученное значение  $x$  для максимальной высоты  $H$  неверно.

Получение ещё более точных формул для оценки высоты подъёма ракеты и оценки условий достижения максимальной высоты потребует учёта понижения температуры воздуха при его расширении и учёта неодновременности выброса всей воды.

«Семь Пядей» – первая в России сеть магазинов и интернет-магазин умных развлечений. Здесь вы найдёте интеллектуальные наборы, конструкторы, наборы для исследований, сборные модели, наборы для творчества, настольные игры, развивающие игрушки и многое другое. Первый магазин «Семь Пядей» был открыт в 2006 году, сегодня в России работают тринадцать магазинов.

Москва (495) 363-01-90, Санкт-Петербург (812) 333-17-17,

Нижний Новгород (831) 415-86-19,

<http://www.7pd.ru>