О ЕГЭ: только факты

В данной статье представлена информация об особенностях контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике в 2008 году. Для выпускников, готовящихся к школьному выпускному экзамену и вступительному экзамену, приводятся конкретные задания повышенного и высокого уровня сложности прошлых лет и даются краткие комментарии к ним.

1. Цели и задачи ЕГЭ

Единый государственный экзамен, как форма независимой итоговой аттестации и отбора учащихся для зачисления в ВУЗы, с 2009 года переходит из экспериментального в штатный режим[1]. Наше математическое сообщество и вся общественность получают объективную информацию о достижении учащимися программных требований и требований стандарта математического образования. Результаты экзамена активно используются для управления качеством образования и призваны помочь составителям соответствующих нормативных документов в разработке достижимого большинством выпускников школы социального заказа общества к уровню математической подготовки учащихся, и, таким образом, способствуют модернизации математического образования.

Наряду с решением этой важнейшей государственной задачи в ходе экзамена по единым для всех вузов страны текстам отбираются наиболее подготовленные учащиеся для зачисления в ВУЗы и ССУЗы. Трудно переоценить важность для всех выпускников школы такого единства (унификации) текстов вступительных экзаменов и возможности подачи единого сертификата в различные вузы страны. Выпускники из различных регионов России имеют единые стартовые возможности для обучения в высшем учебном заведении.

В настоящее время общепризнанными среди педагогического сообщества можно считать следующие доводы, высказываемые в пользу единого экзамена:

– проведение объективной оценки образовательных достижений учащихся вне зависимости от их личностных взаимоотношений с педагогами;

– создание равных условий для различных категорий выпускников образовательных учреждений для продолжения образования;

– достаточная открытость контрольных измерительных материалов и, как следствие, наличие у каждого реальной возможности качественной подготовки к экзаменационному испытанию;

– высокая степень прозрачности зачисления в высшие учебные заве-

[1] Напомним, что эксперимент был начат в 2001 году.

дения по итогам единого экзамена и, как следствие, широкий выбор места для продолжения обучения в случае успешной сдачи ЕГЭ.

В ходе эксперимента в школьном математическом сообществе среди преподавателей высшей школы были жаркие дискуссии относительно разработки контрольных измерительных материалов (КИМ). В процессе плодотворных и конструктивных обсуждений проводилось совершенствование их структуры и содержания. Остановимся на основных вопросах, которые вызывали жаркие споры.

2. Число заданий в варианте ЕГЭ

Число заданий, которое должно содержаться в варианте КИМ, – одна из болевых точек, относительно которой велись дискуссии. С одной стороны, желательно, чтобы ученик имел оптимальное время для выполнения заданий (поиска способа решения, преобразований, вычислений, построений и т. п. и записи решения). С другой стороны, хотелось бы обеспечить возможность показать достигнутый уровень подготовки различных групп учащихся: сильных и слабых, обладающих в большей степени формально-логическим или наглядно-образным мышлением, владеющих построением графиков, успешных в тождественных преобразованиях или в решении геометрических задач и т.п. Очевидно, что в работе должно быть достаточно много разнообразных заданий, чтобы объективно оценить уровень математической подготовки выпускников.

В течение первых 4-х лет эксперимента число заданий в работе изменялось (но не кардинально) и колебалось в пределах от 25 до 30. Учитывая наблюдения при проведении ЕГЭ в различных регионах РФ и мнения региональных представителей, в итоге продолжительных дебатов в 2005 году было решено в варианты КИМ включать по 26 заданий. За установленные 4 часа с этим числом заданий успешно справляются учащиеся, которые набирают от 97 до 100 баллов. На эту группу выпускников ориентированы приёмные комиссии ВУЗов, где предъявляются самые высокие требования к математической подготовке учащихся.

3. Структура работы

Структура работы все эти годы остаётся неизменной – три части, различающиеся по уровню сложности включаемых в них заданий. Эти уровни условно называются «базовый», «повышенный» (по сравнению с базовым) и «высокий».

Часть 1 содержит задания базового уровня сложности. При их выполнении выпускники должны показать владение основными алгоритмами действий, известными способами решения уравнений, неравенств или их систем, а также свойствами функций. Формулировки заданий и форма их представления в первой части контрольных измерительных материалов (КИМ) аналогичны заданиям школьных учебников по курсу алгебры и начал анализа, входящих в федеральный комплект учебников, утверждённый министерством образования и науки.

В ходе эксперимента удалось среди множества заданий базового уровня сложности выделить те, которые оказались посильными для выполнения большинством выпускников, имеющих школьную оценку «3».

Результаты выполнения заданий Части 1 позволяют дифференцировать учащихся по уровню подготовки и выставить итоговую школьную оценку «3».

В **Часть 2** включаются задания повышенного (по сравнению с базовым) уровня сложности. При их выполнении учащиеся должны применить известные алгоритмы действий и методы решения в несколько изменённой ситуации или должны так преобразовать исходные данные задачи, чтобы стало возможным применить известные способы решения. Задания Части 2 оказываются по силам тем учащимся, которые имеют школьные оценки «4» или «5». Результаты их выполнения позволяют дифференцировать хорошо подготовленных выпускников и с учётом полученных баллов выставить школьные оценки «4» или «5».

Часть 3 содержит задания высокого уровня сложности, при выполнении которых выпускнику нужно проанализировать условие и самостоятельно сконструировать метод решения. Эти задания оказываются по силам только части выпускников, имеющих школьную оценку «5», а результаты их выполнения позволяют дифференцировать по уровню подготовки тех учащихся, которые имеют высокий её уровень.

4. Типы заданий

Итоги эксперимента привели к необходимости внести изменения в использование различных типов заданий в Частях 1-3 работы. Так, с 2002 по 2004 гг. все задания Части 1 (то есть задания базового уровня) являлись заданиями с выбором ответа (из нескольких предлагаемых вариантов ответа нужно было выбрать правильный). Все задания Части 2 (повышенного уровня) были заданиями с кратким ответом (требовалось дать только ответ), а задания Части 3 (высокого уровня) были заданиями с развёрнутым ответом (требовалось дать решение и ответ). Теперь же в Части 1 наряду с заданиями с выбором ответа предлагаются задания с кратким ответом. Дело в том, что задания первого типа не позволяют проверить на базовом уровне владение рядом обязательных умений (например, умением решать уравнения разного типа). В Часть 2, кроме заданий с кратким ответом, с 2005 года включаются задания с развернутым ответом повышенного уровня трудности, которые важны для дифференциации выпускников, имеющих школьную оценку «5». По уровню трудности эти задания в большей степени отражают уровень трудности заданий выпускной экзаменационной работы за курс общеобразовательной школы.

Таким образом, вариант КИМ с 2005 г. имеет следующую структуру:

– Часть 1 содержит 13 заданий базового уровня сложности (10 заданий с выбором ответа, 3 – с кратким ответом);

– Часть 2 содержит 10 заданий повышенного уровня сложности (8 заданий с кратким ответом, 2 задания с развёрнутым ответом);

– Часть 3 содержит 3 задания высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

Пример варианта ЕГЭ 2007 года и ответы к заданиям варианта приведены в конце статьи.

Проверка выполнения заданий с выбором ответа и с кратким ответом автоматизирована. За верное решение любого из этих заданий выставляется 1 балл.

Выполнение заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровня сложности проверяется экспертной комиссией. В зависимости от полноты и правильности решений за выполнение заданий повышенного уровня (С1 и С2) выставляется от 0 до 2 баллов, высокого уровня (С3 – С5) – от 0 до 4 баллов.

Верно выполнив всю работу, выпускник может получить максимально 37 первичных баллов:

$$1\times10+1\times11+2\times2+4\times3=37.$$

Первичные баллы, полученные выпускником, переводятся в 100 балльную шкалу[1], и этот тестовый балл заносится в сертификат, который абитуриент представляет в ВУЗы.

5. Содержание и уровень сложности заданий в вариантах КИМ

В отзывах отдельных рецензентов имеется критика вариантов ЕГЭ. Она состоит в том, что, по мнению оппонентов, большинство заданий, входящих в варианты, проверяют воспроизведение фактов, т.е. исключительно память, а не развитие мышления, его глубину, гибкость или самостоятельность. Так ли это? Если бы оппоненты проанализировали задания второй части вариантов КИМ, то увидели бы, что задания повышенного уровня сложности ориентированы на проверку овладения теоретическим материалом в изменённой ситуации либо предполагают его применение после преобразования исходных данных задачи. При выполнении заданий высокого уровня сложности, расположенных в третьей части КИМ, от учащихся требуется владение исследовательскими умениями, выявление и рассмотрение различных возможностей, конструирование нового метода из ранее изученных и пр. Примеры таких заданий приведены в «Открытом сегменте» ЕГЭ (см. на сайте ФИПИ www.fipi.ru).

Остаётся проанализировать первую часть работы, в которую включены задания базового уровня сложности. Заметим, что все задания этой части представляют собой задания, при выполнении которых выпускник должен показать владение каким-либо видом математической деятельности (вычислить, упростить, преобразовать и т.п.), в основе которой лежит какое-либо одно теоретическое знание. В этой части работы нет ни одного задания, которое бы требовало только формального воспроизведения определения, теоремы, формулы и пр. Во всех заданиях нужно применить теоретические знания в конкретных условиях.

Другим моментом, относительно которого высказываются критически настроенные оппоненты, является уровень сложности предлагаемых заданий. Многие работники высшей школы считают, что задания Части 1 и отдельные задания Части 2 слишком просты. Как известно, категория «простоты» относительна. Вполне вероятно, что многие задания покажутся достаточно лёгкими, если их рассматривать с точки зрения отбора в элитарный ВУЗ. Но, вместе с тем, эти же задания, выполняющие дру-

[1] Подробнее о шкалировании результатов ЕГЭ можно узнать в работе «Единый государственный экзамен. Научные основы, методология и практика организации эксперимента: Сборник статей /Под ред. В. А. Болотова – М.: Логос, 2002. – 208 с.»

гую функцию – аттестацию учащихся, – для определённой группы выпускников будут иметь высокий уровень трудности. Чтобы, хотя бы в первом приближении, решить возникший спор, нужно, по-видимому, по каждому «сомнительному» заданию получить информацию о том, как с этим заданием справляются школьники, которых ежегодно насчитывается более 600 000 человек из 77 регионов России.

6. Результаты выполнения заданий базового уровня сложности

Приведём задания базового уровня сложности, которые предлагались в первой части вариантов КИМ ЕГЭ в 2006 – 2007 гг., и результаты их выполнения. Рядом с каждым заданием указан средний процент его выполнения, а в скобках – результаты тех учащихся, которые получили оценки «5» и «3».

Задание № 1. Выполните действия $6c^{\frac{3}{7}}+4\left(c^{\frac{1}{7}}\right)^3$. **76,5% (99%, 76,2%)**

Задание № 2. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$. **72,7% (99%, 75%)**

Задание № 3. Найдите значение выражения $4\cdot 3^{\log_3 5}$. **77,5% (99%, 84%)**

Задание № 4. Тип 1. Функция задана графиком. На каком из указанных промежутков она возрастает? **83,6% (99%, 88%)**

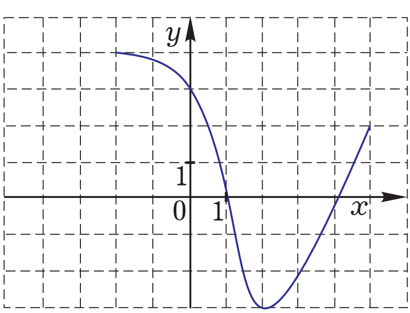

Рис. 1

Задание № 5. Найдите производную функции $y=11x^2+\cos x$. **79,8% (98%, 82%)**

Задание № 6. Найдите множество значений функции

$$y=1{,}5+\log_{2{,}5} x.$$

40,3% (89%, 35%)

Задание № 7. Тип 1. Функция задана графиком. Укажите промежуток, в котором она принимает только отрицательные значения. **84,6% (99%, 89%)**

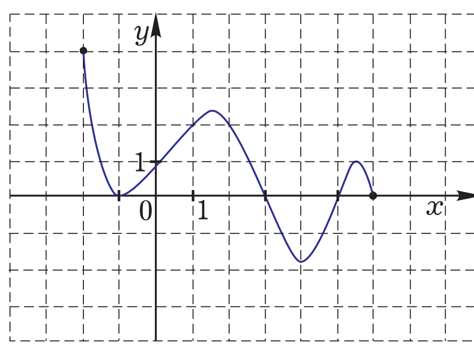

Рис. 2

Задание № 8. Решите неравенство $\frac{(x-1)(x+3)}{9x}>0$. **67,9% (97%, 68%)**

Задание № 9. Решите уравнение $\sin x-\frac{1}{2}=0$. **67,7% (98%, 66%)**

Задание № 10. Решите неравенство $\log_{0,6}(x+5)\le 0$. **66,8% (96%, 67%)**

Задание № 11. Найдите значение выражения

$$1-3\sin^2 x, \text{ если } \cos^2 x = 0{,}9.$$

52,9% (96%, 45%)

Задание № 12. Решите уравнение $3^{x+2}+6\cdot 3^x=5$. **69,8% (99%, 71%)**

Задание № 13. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-x-6}=-x$. **54,0% (97%, 47%)**

Самый беглый анализ приведённых данных убедительно показывает, что задания базового уровня сложности, расположенные в Части 1 варианта КИМ, успешно выполняют функцию итоговой аттестации по курсу алгебры и начал анализа. А, кроме того, анализ результатов тех учащихся, которые получили оценку «3», свидетельствует о том, что даже незначительное увеличение уровня сложности базовых заданий понизит их результаты. Это естественно повлечёт возрастание процента выпускников, написавших экзамен на оценку «2».

Заметим, что процент «двоечников» по математике составляет внушительную цифру – около 21%[1] (по данным на 2007 г.). Это серьёзная проблема, которую предстоит решать и учителям, и администрации школы, и органам управления образования, и разработчикам программ и учебников.

7. Примеры заданий повышенного уровня сложности. Ответы и комментарии к ним

Приведём примеры заданий повышенного уровня сложности, входивших в разные годы в варианты ЕГЭ по математике. Дадим комментарии по их содержанию и способам решения. Напомним, что Часть 2 контрольных измерительных материалов (КИМ) содержит 10 заданий повышенного уровня сложности: 8 заданий (В4 – В11), для которых нужно найти ответ, не предъявляя решение задачи, – это так называемые *задания с кратким ответом* и 2 задания (С1 – С2) – *задания с развёрнутым ответом*. Решение каждого из этих заданий должно быть записано и предъявлено экспертам ЕГЭ для проверки.

Рассмотрим подробнее задания Части 2 на конкретных примерах вариантов КИМ.

Задание В4. «Вычислите

$$13\cdot\log_{9\sqrt[6]{3}}\left(27\sqrt[6]{3}\right).»$$

Ответ: 19.

Решение основано на применении свойств логарифмов для вычисления логарифма вида $m\cdot\log_{a^q}\left(a^r\right)$, в котором число a «замаскировано» в виде степени. Мы видим, что задание – стандартное и может быть выполнено сравнительно быстро теми учащимися, которые твёрдо уяснили определение логарифма числа $\left(a^r\right)$ по основанию $\left(a^q\right)$. В данном случае $a=3$, $r=\frac{19}{6}$, $q=\frac{13}{6}$, $m=13$.

Общее требование к заданию В4 состоит в том, чтобы для получения итогового результата необходимо было выполнить не более «2-3 шагов» вычислений или преобразований и, как следствие, чтобы на его выполнение требовался небольшой интервал времени: 5-6 минут.

Задание В5. По установившейся традиции это задание является заданием-картинкой, в котором задан график производной некоторой функции; требуется исследовать свойства этой функции по известному графику её производной. По результатам выполнения этого задания можно оценить умения и навыки учащихся применять производную для исследования различных свойств функ-

[1] В 2005 г. процент неудовлетворительных оценок составил 22,1%, а в 2006 г. – 19,6%.

ции: монотонность функции, наличие или отсутствие экстремумов, наличие или отсутствие точек экстремумов, точек, в которых достигаются наименьшее (или наибольшее) значение функции. В некоторых вариантах задание B5 контролирует знание геометрического смысла производной функции. С нашей точки зрения эти задания очень важны, поскольку позволяют определить уровень понимания учащимися определения, теорем, связанных с исследованием функций с помощью производной и геометрического смысла производной. Поскольку задания B5 не требуют для их решения никаких вычислений, то каждое такое задание может быть выполнено учащимся не более чем за 3-4 минуты.

Задание B6. «Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=2^{\frac{1}{3}x^2-1}$ на отрезке $[-3;\,1]$.»

Ответ: 3,5.

Задание связано с исследованием функции на наибольшее/наименьшее значение на отрезке без применения производной. Отметим, что в заданиях такого типа для исследования всегда предлагались дифференцируемые функции, однако использование производной приводило к громоздким вычислениям. С помощью данного задания B6 контролируется умение учащегося представить данную функцию в виде композиции

$$x \to t=\frac{1}{3}x^2-1 \to y=2^t,$$

умение находить наибольшее/наименьшее значение основных элементарных функций на отрезке.

Из свойств квадратичной функции $t=\frac{1}{3}x^2-1$ следует, что из неравенства $-3\le x\le 1$ следует неравенство $-1\le t\le 2$, из которого следует неравенство $0{,}5\le y\le 4$. Поэтому искомая разность равна 3,5.

Задание B7. «Решите уравнение

$$25x^2-20x+6=$$
$$=\left(\sqrt{2}-\cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{2}+\cos\frac{5\pi x}{4}\right).»$$

Ответ: 0,4.

Предложенное задание отнесено к заданиям повышенного уровня сложности, поскольку для его решения нет алгоритма. Требуется использовать свойство ограниченности функций, применение которого отрабатывается в школьном курсе недостаточно. Задания такого типа появились в школьной практике, по сравнению с традиционными способами, не так давно. С другой стороны, этот приём не является новым и многие учителя, и некоторые авторы школьных учебников включают аналогичные задания в обязательный школьный практикум. Это происходит особенно часто в тех случаях, когда ученики класса готовятся продолжить своё образование в вузах, в которых существует вступительный экзамен по математике. Более того, в современную школьную практику включены задания, для выполнения которых требуется использовать и другие свойства функций: монотонность функции, периодичность функции, сохранение знака функции, непрерывность функции и другие. Поэтому это задание следует относить к заданиям повышенного, а не высокого уровня сложности.

Задание B8. «Нечётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции

$$g(x)=1{,}7+f(x-6{,}5)$$

вычислите сумму

$$g(5)+g(6)+g(7)+g(8).»$$

Ответ: 6,8.

Для выполнения этого задания требуется использовать свойство нечётности функции $f(-x)=-f(x)$. Искомая сумма

$$g(5)+g(6)+g(7)+g(8)=$$
$$=1{,}7+f(5-6{,}5)+1{,}7+f(6-6{,}5)+$$
$$+1{,}7+f(7-6{,}5)+1{,}7+f(8-6{,}5)=$$
$$=4\cdot 1{,}7+f(-1{,}5)+f(-0{,}5)+$$
$$+f(0{,}5)+f(1{,}5)=6{,}8.$$

Задание B9. Это задание традиционно посвящено «текстовым задачам». Отметим сразу же, что понятие «текстовой задачи» может пониматься по-разному, субъективно, поскольку в математике не существует определения «текстовой задачи». В вариантах ЕГЭ «текстовой задачей» считается такая задача, для решения которой можно составить уравнение или систему уравнений, или систему каких либо других условий, например, уравнения и неравенств, которые описывают (с точностью до принимаемых по умолчанию упрощений) тот сюжет, о котором говорится в условии. При этом возможны различные способы решения этой задачи, в том числе и арифметические, которые однако не отражаются в бланках для выполнения работы – указывается только ответ. Текстовые задачи, предлагаемые в КИМ, относятся к стандартным задачам, которые встречаются во всех школьных учебниках, используемых в современной школе. Нужно дополнительно отметить, что с помощью такой задачи удаётся проконтролировать умение ученика ориентироваться в ситуации, ответить на вопрос, косвенно и упрощённо связанный с возможной жизненной ситуацией. Приведём пример текстовой задачи.

«Подарочный набор состоит из конфет трёх сортов. Массы конфет первого, второго и третьего сортов в этом наборе относятся как $1:2:8$. Массу конфет первого сорта увеличили на 20%, а второго – на 6%. На сколько процентов надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса всего набора не изменилась?»

Ответ: 4.

Задание B10. «Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 18. Основание призмы – треугольник ABC, площадь которого равна 12, $AB=5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания призмы.»

Ответ: 3,75.

Поскольку это задание по стереометрии, то, конечно, оно относится к заданиям повышенного уровня сложности, поскольку положение, сложившееся в современной школе с преподаванием геометрии, очень тревожное. Во-первых, слишком малое число часов (1-2 часа в неделю) при сохранении того же обязательного минимума. Во-вторых, отсутствие обязательной аттестации школьников, как за курс планиметрии, так и за курс стереометрии. В результате различных «реформ» знания школьников по геометрии существенно ухудшились. В этой статье мы не можем обсуждать проблемы изучения геометрии в школах РФ, поэтому отметим, что уровень сложности задания B10 вполне соответствует образовательному минимуму. Для решения задачи достаточно знать определение угла между плоскостями, уметь построить высоту треугольника, знать содержание теоремы о трёх перпендикулярах и определение тангенса угла прямоугольного треугольника. Всё перечисленное неплохо отрабатываются в любом школьном курсе стереометрии.

Задание B11. «Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её высота равна 3 и тангенс угла между диагональю и основанием равен $\frac{1}{4}$.»

Ответ: 36.

Задания по планиметрии вызывает у выпускников школ бóльшие трудности по сравнению с заданиями по стереометрии, поскольку курс планиметрии заканчивается в 9 классе и часто не повторяется при изучении стереометрии в 10-11 классах. Поэтому сюжеты планиметрических задач выбираются из некоторого неформального «набора» основных задач, которые часто называют «опорными задачами». При этом следует напомнить, что содержание этого набора опорных задач может пониматься различным образом и, конечно, почти всегда субъективно. По поводу нашего взгляда на опорные задачи укажем на следующее. Мы не относим к опорным задачам те, для решения которых достаточно знать только некоторые формулы, пусть и важные. Например, задача на вычисление гипотенузы по известным катетам мы не относим к опорным задачам. Мы считаем эту важную задачу опорной при изучении теоремы Пифагора. Аналогичные примеры можно привести и с задачами на другие темы курса стереометрии и планиметрии.

При решении приведённой выше задачи самый короткий путь будет у того ученика, который владеет основными свойствами равнобедренной трапеции, в частности, следующими свойствами.

- *В равнобедренной трапеции углы при большем (меньшем) основании равны между собой.*
- *Серединные перпендикуляры к основаниям равнобедренной трапеции совпадают.*
- *Серединный перпендикуляр к основаниям равнобедренной трапеции является осью симметрии данной трапеции.*
- *Вокруг трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.*
- *Основание высоты равнобедренной трапеции, опущенной из вершины её тупого угла, разделяет основание трапеции на два отрезка, больший из которых равен средней линии трапеции.*

Задания C1 и C2 – задания с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности. Каждое из этих заданий оценивается двумя баллами. Результат выполнения этих заданий проверяется экспертами (обычно двумя экспертами) и решение (на 1 балл) хотя бы одной из них необходимо для получения оценки «пять» за курс «алгебры и начал анализа».

Задание C1. «Решите уравнение

$$\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2 .»$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{7}$, 0, $\frac{2\pi}{7}$.

Это задание относится к стандартным заданиям на отбор корней тригонометрического уравнения. Успешное выполнение такого задания свидетельствует о твёрдом усвоении школьником курса тригонометрии на уровне стандартов образования. Поэтому оно доступно только хорошо и отлично успевающим ученикам. Отметим, что запись решения подобных задач может не содержать словесных пояснений. Вполне достаточным является, например, такое решение.

Решение.

$$\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ \cos 7x = 1. \end{cases}$$

$\cos 7x = 1$, $7x = 2k\pi$ и $x = \frac{2k\pi}{7}$,

где $k \in Z$.

$-1 \le \frac{2k\pi}{7} \le 1$, $-\frac{7}{2\pi} \le k \le \frac{7}{2\pi}$, $k \in Z$ $\Rightarrow$ $k = -1,\ 0, 1$.

Ответ: $x = \frac{2k\pi}{7}$, где $k = -1,\ 0, 1$ (или, в другой форме: $-\frac{2\pi}{7}$, 0, $\frac{2\pi}{7}$).

Допустимо отсутствие знака $\Leftrightarrow$ равносильности; обоснование того, что $1 < \frac{7}{2\pi} < 2$, и нахождение значения каждого корня в отдельности.

Задание С2. «Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$f(x) = \log_2(3x+13)$ и $g(x) = 5{,}5$

меньше, чем 0,5.»

Ответ: $\left(\frac{19}{3}; 17\right)$.

Это задание также вполне доступно хорошо успевающему ученику без специальной подготовки по математике, поскольку ясно, что расстояние между точками на плоскости, имеющими одинаковые абсциссы, равно модулю разности их ординат. В данном случае задача сводится к решению неравенства $|f(x) - g(x)| < 0{,}5$, которое также является стандартным неравенством с модулем.

Приведём возможное решение этого задания.

1) Условию задачи удовлетворяют только те значения x, для которых выполняется неравенство

$$|f(x) - g(x)| < 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\log_2(3x+13) - 5{,}5| < 0{,}5.$$

2) Отсюда $5 < \log_2(3x+13) < 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^5 < 3x+13 < 2^6 \Leftrightarrow 19 < 3x < 51 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{3} < x < 17.$$

Ответ: $\left(\frac{19}{3}; 17\right)$.

Отметим, что запись условия $3x+13>0$ существования логарифма $\log_2(3x+13)$ не является обязательной при решении любого двойного неравенства относительно $\log_a(f(x))$ и её отсутствие не может приводить к понижению оценки.

8. Примеры заданий высокого уровня сложности. Ответы и комментарии к ним

Рассмотрим теперь задания из Части 3 КИМ ЕГЭ разных лет.

Часть 3 состоит из трёх заданий высокого уровня сложности по сравнению с другими заданиями КИМ. Каждое из этих заданий оценивается четырьмя баллами. Эти задания доступны хорошо подготовленным выпускникам школ, готовящимся к поступлению в вузы с повышенными требованиями к знаниям школьного курса математики. Для решения этих задач от абитуриента требуется не только наличие аналитического мышления, но и развитой техники тождественных преобразований, умения ориентироваться в новой ситуации.

Задание С3.

«Требуется разметить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью $1800\ \text{м}^2$, состоящий из трёх прямоугольных частей и имеющий форму, изображённую на рисунке 3, где $FG = EF = 10$ м, $BC = 15$ м и $CD \ge 40$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, LH и

CD, при которых периметр является наименьшим».

Ответ: 200 м, 50 м, 50 м, 40 м.

В данном случае задание связано с нахождением наименьшего значения переменной величины, зависящей от нескольких величин. Кажется, что способ решения задачи выходит за рамки школьного курса. Но нет! Достаточно умело подобрать параметры исследуемой величины, воспользоваться данным неравенством, и задача приводится к задаче на нахождение наименьшего значения функции одной переменной. Однако выбрать эти параметры не каждому под силу, поэтому результаты решения этого

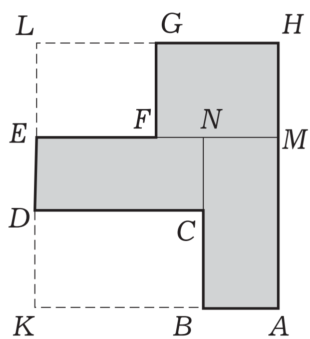

Рис. 3

задания хорошо дифференцируют учащихся по уровню их математической подготовки. Именно для этого и создавались задания Части 3 КИМ.

Задание С4. «В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 60^\circ$, $AC = 14$, $BC = 8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C. Найдите объём второй пирамиды».

Ответ: 28.

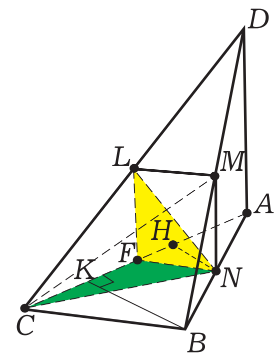

Рис. 4

Стереометрические задания из Части 3 КИМ – задачи на пространственные комбинации тел. Решение задач такого уровня сложности доступно только хорошо успевающим ученикам, готовящихся поступать в математические вузы. Поэтому результаты выполнения этих заданий невысоки и заполняют промежуток от 0,5% до 1,5% среди всех учащихся, сдававших ЕГЭ по математике. Среди учеников, сдававших ЕГЭ и получивших оценку «пять» за курс «алгебры и начал анализа», этот процент выше и заполняет промежуток от 7% до 18%.

Отличительной особенностью почти всех заданий С4 КИМ является простота вычислительной части задачи. Для предложенной задачи только вычисления занимают две-три строки. Но для того, чтобы провести эти вычисления, необходимо найти путь решения задачи. Именно этот процесс – процесс поиска решения – и представляет наибо́льшую трудность.

На рисунке 4 выделена штриховкой та пирамида, объём которой вдвое меньше искомого объёма второй пирамиды и объём которой находится практически устно, поскольку её высота равна $2\sqrt{3}$ – половине данной длины отрезка AD и площадь её основания составляет легко вычисляемую часть площади треугольника *ABC*. Отсюда следует ответ: искомый объём второй пирамиды равен 28.

Для получения максимального балла за решение задания C4 необходимым условием является наличие обоснований всех ключевых моментов решения. При решении данной задачи такими моментами являются особенности расположения обеих пирамид относительно друг друга, параметры второй пирамиды, позволяющие вычислить её объём, пояснения к вычислениям, приводящих к верному ответу, при этом сами вычисления должны быть правильными.

Для получения трёх баллов достаточно без обоснований записать в решении те свойства конфигурации, которые позволяют получить правильный ответ.

Два балла получили все те абитуриенты, которые, *не записывая* свойства конфигурации, правильно использовали эти свойства, провели верные вычисления и получили правильный ответ. При этом возможны даже некоторые «описки» в вычислениях, в результате которых может быть получен неверный ответ. Под «описками» мы понимаем ошибки в вычислениях на заключительной стадии решения. Опиской является неверно найденная сумма или произведение, или частное чисел, каждое из которых является искомым числом. Например, запись

$$V=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 5=30$$

вместо правильного результата $V=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 5=20$ считается опиской.

Наконец, один балл получили те, кто хотя и не завершил решение, но всё же вполне разобрался во взаимном расположении фигур конфигурации и верно вычислил хотя бы некоторые из её параметров.

Задание C5. «Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\cdot 4^a$ и $143-3a\cdot 4^{a+1,5}+a^2\cdot 16^a$ являются решениями неравенства $\log_{12,5-x}\left(\log_4\frac{x+5}{x+2}\right)\geq 0$.»

Ответ: 1,5.

Это задание имеет максимальную сложность по сравнению со всеми задания КИМ. Решение такого задания доступно далеко не многим учащимся. Однако те из них, кто готовится поступать в ведущие математические вузы нашей страны, вполне могут справиться с этой задачей. В самом деле, решение неравенства $\log_{12,5-x}\left(\log_4\frac{x+5}{x+2}\right)\geq 0$ является вполне доступным для абитуриентов, которые готовятся поступить в вуз с повышенными требованиями к их знаниям.

Отметим, что при решении подобных неравенств допустимо без обоснований заменить данное неравенство ему равносильной системой:

$$\log_{12,5-x}\left(\log_4\frac{x+5}{x+2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_4\dfrac{x+5}{x+2}-1}{(12,5-x)-1}\geq 0,\\ 12,5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x+5}{x+2}-4}{11,5-x}\geq 0,\\ \dfrac{x+5}{x+2}>0,\\ 12,5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{(x+2)(x-11,5)}\geq 0,\\ (x+2)(x+5)>0,\\ x<12,5.\end{cases}$$

Неравенство выполняется на $(-2;-1]\cup(11,5;\ 12,5)$.

Конечно, можно решать традиционным способом, рассматривая два случая: $0<12{,}5-x<1$ и $12{,}5-x>1$, и для каждого их этих неравенств за-

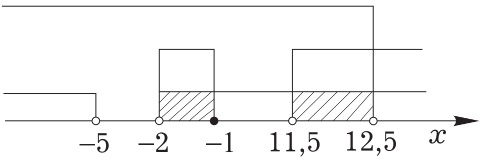

Рис. 5

писать соответственно

$$0<\log_4\frac{x+5}{x+4}\le 1 \text{ и } \log_4\frac{x+5}{x+4}\ge 1.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$1)\ \begin{cases} 0<12{,}5-x<1, \\ 0<\log_4\dfrac{x+5}{x+2}\le 1 \end{cases} \text{ и}$$

$$2)\ \begin{cases} 12{,}5-x>1, \\ \log_4\dfrac{x+5}{x+2}\ge 1. \end{cases}$$

Первая их этих систем равносильна неравенству $11{,}5<x<12{,}5$, а вторая – неравенству $-2<x\le -1$.

Исследование того, какие именно значения параметра a удовлетворяют условию задачи, также не очень сложная задача для подготовленного молодого человека, обладающего хорошей аналитической подготовкой и отличными вычислительными навыками. Здесь необходимо заметить, что число $y=143-3a\cdot 4^{a+1{,}5}+a^2\cdot 16^a$ выражается через второе число $t=a\cdot 4^a$. А именно,

$$y=143-3a\cdot 4^{a+1{,}5}+a^2\cdot 16^a=$$
$$=143-3a\cdot 4^a\cdot 4^{1{,}5}+\left(a\cdot 4^a\right)^2=$$
$$=143-24t+t^2=(t-12)^2-1.$$

Обратим внимание на запись этих преобразований. Эта запись абсолютно корректна, хотя и несколько «длинновата». Теперь следует рассмотреть четыре случая:

1) оба числа t, $y(t)=(t-12)^2-1$ лежат в первом интервале;

2) оба этих числа лежат во втором интервале;

3) первое лежит в первом интервале, а второе во втором;

4) первое лежит во втором, а второе – в первом интервале.

После рассмотрения этих случаев найдём, что реализуется только случай 4) и только при одном значении $t=12$. Осталось решить уравнение $a\cdot 4^a=12$. Однако это уравнение просто так не решишь. Необходимо заметить, что число $a=\frac{3}{2}$ является его решением и больше никаких решений это уравнение не имеет. В самом деле, отрицательные значения a и $a=0$ не удовлетворяют уравнению $a\cdot 4^a=12$, так как $4^a>0$ при всех значениях a. При $a>0$ выражение $a\cdot 4^a$ является возрастающей функцией a и поэтому это уравнение не может иметь более одного положительного корня. Один такой корень найден: $a=\frac{3}{2}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяет только одно значение параметра $a=\frac{3}{2}$.

Конечно, таких абитуриентов сравнительно немного. Процент выполнения этого задания не превышает 0,5%, то есть только 0,5% от всех сдававших ЕГЭ по математике смогли справиться с заданием С5. Этому не следует удивляться, поскольку такой же процент абитуриентов, поступающих в математические вузы, могут решить последние задания из вариантов вступительного экзамена. Этот процент в этих вузах бывает и ниже 0,5%.

Таким образом, задания С1 – С5 достигают поставленной цели – дифференцируют учащихся по уровню их математической подготовки.

9. О результатах выполнения заданий ЕГЭ по математике[1]

В ходе эксперимента с каждым годом расширялось число участвующих регионов и увеличивалось число учащихся, проходящих единую объективную итоговую аттестацию. В 2007 г. ЕГЭ по математике сдавали более 600 000 выпускников из 77 регионов России. В настоящее время органы управления образованием и педагогическая общественность располагают объективными и достоверными данными о состоянии математической подготовки выпускников 11 классов.

Приведём результаты, показанные участниками ЕГЭ 2005 – 2007 гг.

Остановимся на некоторых тенденциях в состоянии математической подготовки выпускников средней школы, которые выявились при проведении ЕГЭ в 2005 – 2007 г.г.

1. Результаты 2005 – 2007 г.г. демонстрируют значительные различия в достижении <u>на базовом уровне</u> требований стандарта 2004 года учащимися, показавшими различные уровни общей математической подготовки. Так, группа выпускников, показавших «хороший» и «отличный» уровни подготовки, в среднем продемонстрировала достижение всех проверявшихся 13-ти требований стандарта, группа с «удовлетворительной» подготовкой – 9-11 из этих требований (2006 г. – 6-8 из 13-ти), а выпускники с «неудовлетворительной» подготовкой, как и в 2006 г., не достигли ни одного требования.

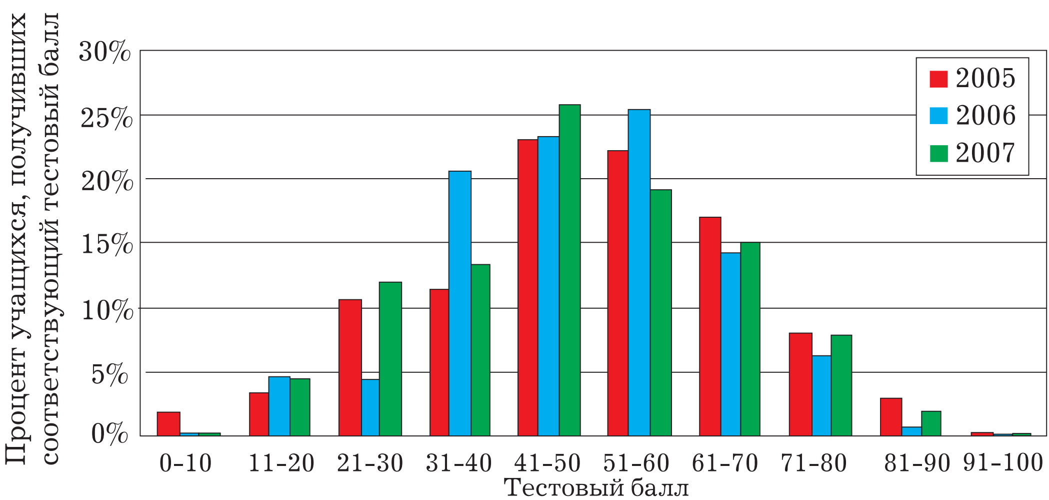

Рис. 6. Распределение участников экзамена по полученным тестовым баллам

Вместе с тем, результаты ЕГЭ показывают, что:

- формально усваивается теоретическое содержание курса, поэтому учащиеся не могут применить изученное в ситуации, которая даже незначительно отличается от стандартной;

[1] Приведены материалы аналитического отчёта (см. на сайте ФИПИ www.fipi.ru).

- у части учащихся отсутствуют навыки самоконтроля, что, к сожалению, приводит к появлению ответов, невероятных в рамках условия решаемой ими задачи;
- на недостаточном уровне усвоено содержание важного раздела курса математики старшей школы – «тригонометрии»;
- особое беспокойство вызывает стабильно слабое овладение материалом основных разделов курса и начал анализа 10-11 классов группой учащихся, получивших неудовлетворительную оценку, эта группа составляет примерно 20% выпускников.

2. Анализ решений, предложенных участниками экзамена к заданиям с развёрнутым ответом, позволил выявить некоторые недочёты в подготовке выпускников, продемонстрировавших хорошую и отличную подготовку по математике[1]. Одним из основных недочётов является жёсткое следование изученным алгоритмам, не обращая внимания на особенности условия поставленной задачи, позволяющие использовать более рациональный метод решения.

3. С большинством геометрических задач повышенного уровня по планиметрии в 2007 году в среднем справились 9% выпускников (2006 г. – 10%, 2005 г. – 7%), по стереометрии – 10% (2006 г. – 11% и 2005 г. – 12%). Задачу по стереометрии высокого уровня (С4) в 2007 году в среднем выполнили 0,79% (2006 г. – 0,63%, 2005 г. – 1,75%).

Как и в предыдущие годы, участники экзамена 2007 года в целом показали невысокие результаты при решении геометрических задач повышенного уровня сложности.

При интерпретации этих данных следует иметь в виду, что часть учащихся с хорошей подготовкой, не предполагающих поступать в учебные заведения, где требуется сдача экзамена по математике, вообще не приступает к выполнению заданий по геометрии, включённых в варианты КИМ.

10. Пример варианта ЕГЭ 2007 года[2]

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин.). Работа состоит из трёх частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 – А10 и В1 – В3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. К каждому заданию А1 – А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 – В11, С1, С2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям В4 – В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (С3, С5) и одно – геометрическое (С4).

[1] См. методическое письмо «О преподавании учебного предмета «Математика» с учётом результатов единого государственного экзамена 2007 г.».

[2] Здесь приведено содержание заданий варианта КИМ, а не его оригинал-макет.

При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При её выставлении не учитывается выполнение <u>четырёх</u> заданий (B9, B10, B11, C4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звёздочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Часть 1

При выполнении заданий A1 – A10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1. Упростите выражение

$$b^{-3,4}\cdot 5b^{0,2}.$$

1) $5b^{-3,6}$; 2) $5^{0,2}b^{-3,2}$; 3) $5b^{-3,2}$; 4) $5^{0,2}b^{-3,6}$.

A2. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1) 1; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) 9; 4) 27.

A3. Вычислите: $\log_2 80-\log_2 5$.

1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

A4. Функция задана графиком (рис. 7). На каком из указанных промежутков она возрастает?

1) [1; 4]; 2) [2; 5]; 3) [0; 5]; 4) [–2; 1].

A5. Найдите производную функции $y=12x^3-e^x$.

1) $y'=15x^2-xe^{x-1}$;

2) $y'=3x^2-\dfrac{e^x}{x+1}$;

3) $y'=36x^2-xe^{x-1}$;

4) $y'=36x^2-e^x$.

A6. Найдите множество значений функции $y=3\sin x$.

1) [–3; 3]; 2) [0; 3]; 3) [–1; 1]; 4) (–∞; +∞).

A7. Функция задана графиком (рис. 8). Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

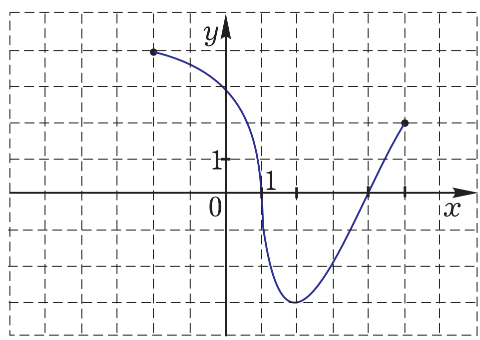

Рис. 7

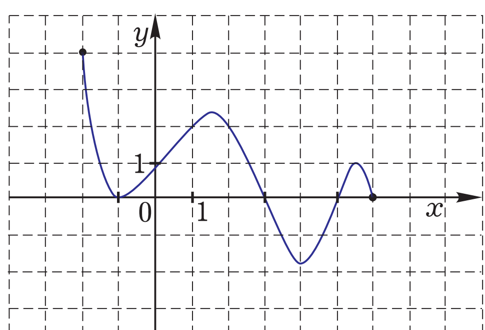

Рис. 8

1) (3; 6); 2) (3; 5); 3) (–2; –1); 4) (–2; 0).

А8. Решите неравенство

$$\frac{3+x}{(x-9)(x-1)}\le 0.$$

1) $(-\infty;\ -3]$; 2) $(-\infty;-3]\cup(1;9)$;

3) $(-\infty;-9]$; 4) $(-3;1]\cup(9;+\infty)$.

А9. Решите уравнение

$$\sin x-\frac{1}{2}=0.$$

1) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$;

3) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;

4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

А10. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x}-\frac{1}{27}}$.

1) $[0{,}5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0{,}5)$; 3) $(0{,}5;\ +\infty)$; 4) $[2;\ +\infty)$.

Ответом на задания В1 – В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Найдите значение выражения

$3\sin^2\alpha-5\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha=-0{,}5$.

В2. Решите уравнение

$$3^{x+2}+6\cdot 3^x=5.$$

В3. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-x-6}=-x.$$

Часть 2

В4. Найдите значение выражения $\cos x$, если известно, что

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2},\\ 2\cos x+8\sin y=3.\end{cases}$$

В5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке (-6;7). На рисунке 9 изображён график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y=3-x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

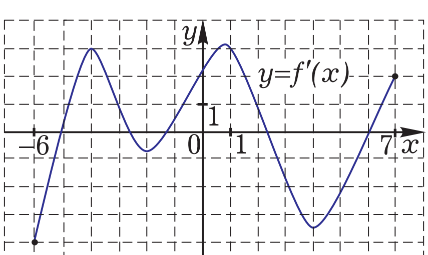

Рис. 9

В6. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{(37-20\sqrt{3})^2}+2\sqrt{3}.$$

В7. Решите уравнение

$$\log_7(3x+5)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0.$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

В8. Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке 10 изображён график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения $f(-5)-f(-1)+f(12)$.

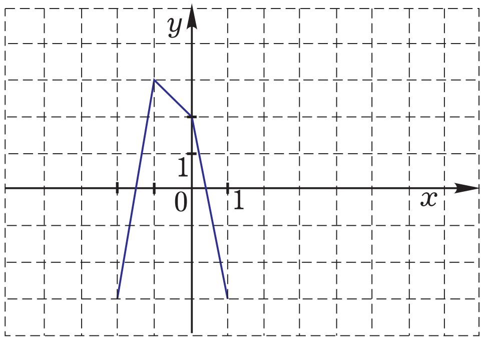

Рис. 10

B9*. Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт ещё за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада?

B10*. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, KM=10, объём цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

B11*. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите точки минимума функции

$$f(x)=3x^4+3x^3-72x^2+2^{-\log_{0,5}(x^3+8)}.$$

С2. Решите уравнение

$$x^2+x=0{,}5\cdot(6-x)+\sqrt{2x^2+3x+2}.$$

Часть 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка (-3;-1] значение выражения x^4-8x^2-2 не равно значению выражения ax^2.

С4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 его оснований лежат соответственно точки L, K, M так, что $AL:LD=2:5$, $A_1K:KB_1=2:3$, $B_1M:MC_1=5:2$. Во сколько раз объём параллелепипеда больше объёма пирамиды с вершиной K и основанием $LDMB_1$?

С5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3+36x^2+22x+4=0, \\ 9\sin\dfrac{\pi}{x}+\cos((5x+1)y)= \\ =y\left(y+\dfrac{2}{x}-1\right)+\sqrt{\dfrac{4}{x}+16+5x(1-5x)\cdot\sin y} \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответы

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4	B5
3	1	4	2	4	1	2	2	3	1	1	–1	–2	0,3	3
B6	B7	B8	B9	B10	B11	C1	C2		C3				C4	
5	–1,5	–4	18	60	24	3	–3,5; 2		$\left(-\infty;-9\right)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$				7	