МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ

ЕГЭ

Иррациональные уравнения

Москва 2010

Уравнение вида $\sqrt{ax+b}=cx+d$.

В школе довольно много времени уделяется построению графиков элементарных функций, но затем они почти не находят практического применения. При решении уравнений такого типа они пригодятся.

Какое утверждение:

1) уравнение имеет два корня одного знака (оба корня или положительны, или оба корня отрицательны),

2) уравнение имеет только один корень, и он отрицателен.

3) уравнение имеет два корня разных знаков,

4) уравнение имеет только один корень, и он положителен,

верно по отношению к корням уравнений 88 -91?

1. $\sqrt{x+4}=3(x+1)$.

Ответ. 2.

▶ Для ответа на поставленный вопрос не обязательно решать уравнение. Часто достаточно аккуратно начертить эскизы левой и правой частей.

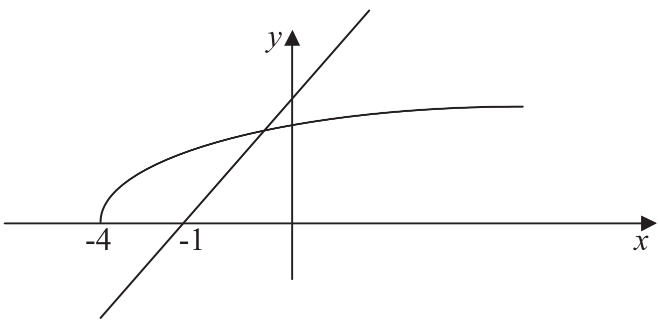

Рис.4.

На оси надо отметить точки пересечений полупараболы и прямой с осями координат. Из рисунка ясно, что пересечение происходит на отрицательной полуоси – это обеспечивается тем, что прямая пересекает ось *Ox* правее, а ось *Oy* выше полупараболы.

Ответ. 2). ◀

2. $\sqrt{7-x}=x+1$.

3. $3\sqrt{10-x}=12-x$.

4. $5\sqrt{7-x}=13-x$.

Уравнение – «монстр» $\sqrt{f(x)}=g(x)$

5. (ЕГЭ) Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{2x^2-7x-3}+x=3$.

Ответ. – 3.

Первый способ (традиционный, но не доведенный до конца)

▶ Обычно школьники так решают это уравнение: «Найдем ОДЗ: $2x^2-7x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\ \frac{7-\sqrt{73}}{4}\right]\cup\left[\frac{7+\sqrt{73}}{4};\ +\infty\right)$. Решим уравнение $\sqrt{2x^2-7x-3}=3-x$, возведя обе части в квадрат: $2x^2-7x-3=9-6x+x^2$, $x^2-x-12=0$. Получаем, что $x_1=-3$, $x_2=4$. Проверяем: оба корня принадлежат ОДЗ. Ответ…» ◀

И тут возникает вопрос, как записать два ответа в бланке ЕГЭ? Ясно, что такого в данном случае быть не может. Где-то ошибка? Да. Тогда в чём дело?

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ встречается везде и всюду: на вступительных экзаменах практически во все вузы, каждый год в ЕГЭ. Как только его не решают! «Монстр» какой-то, а не уравнение!

Несмотря на то, что оно так часто встречается, чёткое решение является редкостью. При решении многие пишут много лишнего (потому увеличивается количество описок и ошибок), а важные условия не учитывают.

Что лишнее?

1) Поиск ОДЗ. Почему? Ведь корень существует только из неотрицательных чисел. Да, это так. Но при решении мы возводим обе части в квадрат и решаем *уравнение* $f(x)=g^2(x)$, в котором правая часть неотрицательна для *любого* решения. Поэтому ОДЗ уравнения при таком способе решения всегда выполняется *автоматически.* В крайнем случае, можно просто записать ОДЗ, но *не надо* тратить энергию на решение неравенства $f(x)\geq 0$! Тем более, что при неправильном нахождении ОДЗ подстановка найденных корней может привести к тому, что они не принадлежат ОДЗ, чего не может быть, т. к. в этой задаче этого не может быть *никогда*.

2) Проверка – принадлежат ли корни ОДЗ?

Конечно, ни 1), ни 2) ошибкой не являются, но происходит потеря времени и энергии.

Почему же получилось два ответа? Где ошибка?

Есть правило: Если не пользоваться равносильными переходами, то в уравнениях, где проводилось возведение в квадрат, *необходимо* делать *проверку*, подставляя найденные корни в *уравнение*, а не в ОДЗ. Этого не было сделано, и это типичная ошибка. На самом деле, подстановка в уравнение дает:

$$\sqrt{2\cdot 9-7\cdot -3-3}=3-(-3)\Leftrightarrow 6=6, \sqrt{2\cdot 16-7\cdot 4-3}=3-4<0\Leftrightarrow\varnothing.$$

Правильный

Ответ. – 3.

Теперь рассмотрим уравнение такого типа в общем виде:

$$\sqrt{f(x)}=g(x).$$

Уравнение имеет решение *только* для $g(x)\geq 0$. В ОДЗ левая часть уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$ всегда неотрицательна, и возведение в квадрат в этом случае дает *равносильное* в ОДЗ уравнение, а ОДЗ при этом автоматически выполняется, т. к. решается уравнение

$f(x)=g^2(x)$, в котором подкоренное выражение всегда неотрицательно. Мы получаем условие равносильности:

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР К2)}$$

Отмечаем еще раз: ОДЗ не ищем, а условие $g(x)$i 0 проверяем обязательно.

Откуда же могут появиться «лишние» корни?

После возведения в квадрат на самом деле решаются сразу *два* уравнения: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ и $\sqrt{f(x)}=-g(x)$, но на *разных* промежутках числовой оси: $\sqrt{f(x)}=g(x)$ там, где $g(x)\geq 0$ и $\sqrt{f(x)}=-g(x)$ там, где $g(x)$J 0. Поэтому «лишние» или «посторонние» корни появятся, если уравнение $\sqrt{f(x)}=-g(x)$ имеет решение, и лишние корни не появятся, если уравнение $\sqrt{f(x)}=-g(x)$ не имеет решений. Уравнение $f(x)=g^2(x)$ является следствием обоих уравнений.

Проведем *доказательство* найденного равносильного соотношения в традиционной форме.

1. Если число x является решением уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$, то x является и

решением системы $\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=g^2(x), \end{cases}$ т. е.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases}$$

Действительно, если число x является решением уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$, то $g(x)$i 0, а тогда возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению $f(x)=g^2(x)$.

2. Если число x является решением системы $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases}$ то x является и решением уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$, т. е.

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = g(x).$$

Действительно, т. к. $f(x) = g^2(x)$, то $f(x) \ge 0$ и $\sqrt{f(x)}$ существует. А так как $g(x) \ge 0$, то $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Отсюда и следует, что

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР К2)}$$

что и требовалось доказать.

Второй способ

► Теперь оформим решение с применением условия равносильности (УР К2):

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 3} + x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 7x - 3} = 3 - x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3 - x \ge 0, \\ 2x^2 - 7x - 3 = (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x = \dfrac{1 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ. -3. ◄

6. (ЕГЭ) Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{2x + 7}$ **-** $2 = x$.

Ответ. 1.

Часто одна и та же задача может быть решена несколькими совершенно разными способами, причём выбор способа зависит не только от знаний, но и от эрудиции решающего, а также от желания решить задачу проще, красивее или быстрее.

Сначала перепишем уравнение в стандартном виде:

$$\sqrt{2x+7}=x+z.$$

Первый способ.

▶ Решим задачу графически. Построим эскизы левой и правой частей уравнения (рис. 1) уравнения $\sqrt{2x+7}=x+2$:

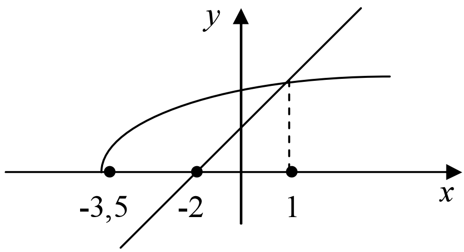

Рис.1

Видно, что пересечение одно. Находится подбором: $x=1$.

Ответ. 1. ◀

Второй способ

▶ Решим уравнение с помощью условия равносильности (УР К2):

$$\sqrt{2x+7}-2=x \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0, \\ 2x+7=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2\ge 0, \\ x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ. 1. ◀

Примечание. Для тех, кто графики строить быстро не может, больше подходит второй способ.

В заданиях 57 - 74 найдите корень (или сумму корней, если их несколько) соответствующего уравнения

7. $\sqrt{0,5\left(x^2 - 3x + 4\right)} = x - 2$.

8. (ЕГЭ) $\sqrt{21 - 4x} - x + 4 = 0$.

9. (ЕГЭ) $\sqrt{15x^2 + 2x + 8} + 4x = 0$.

10. $\sqrt{x + 3} = x + 1$.

Разные уравнения.

11. Найдите наименьшее целочисленное решение уравнения $\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1}$.

Ответ. -1.

▶ Очень странное уравнение: много радикалов, все квадратные трёхчлены разные. Возведение в квадрат приведёт к очень громоздкому уравнению. Поэтому посмотрим сначала, нет ли одинаковых множителей под знаками корней:

$$\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+5)} = \sqrt{(x-1)(x+1)} + \sqrt{(x+1)(2x-1)}.$$

Оказывается, есть. Видно, что $x = -1$ является решением. Бо2льшие решения нас не интересуют, поэтому рассмотрим случай, когда $x + 1 < 0$. При таких x под знаком первого корня $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ 4x + 5 \le 0 \end{cases}$ и поэтому $\sqrt{(x+1)(4x+5)} = \sqrt{-(x+1)}\sqrt{-(4x+5)}$ (под знаком остальных корней аналогично). Тогда уравнение перепишется в виде:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{(x+1)(2x-1)}$$ Ы

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1<0,\\ \sqrt{-(4x+5)}=\sqrt{-(x-1)}+\sqrt{-(2x-1)}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{5}{4},\\ -4x-5=-x+1-2x+1+2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{5}{4},\\ -x-7=2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-7,\\ x^2+14x+49=8x^2-12x+4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-7,\\ 7x^2-26x-45=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-7,\\ (x-5)(7x+9)=0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Наименьшее целочисленное решение – это число -1.

Ответ. -1. ◀

12. Найдите наибольшее целочисленное решение уравнения $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

13. Найдите наибольшее целочисленное решение уравнения $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$.

Послесловие

В этой демо-версии мы привели в кратком виде некоторые параграфы нашего пособия «Иррациональные уравнения». В самом пособии вы сможете найти более полную информацию по затронутым темам, а также следующие параграфы:

§ Иногда кажется, что уравнение иррациональное

§ ОДЗ и решение

§ Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=a^2$

§ Уравнение вида $\alpha^2\sqrt{x+a}+\beta^2\sqrt{x+b}=const$. Монотонность

§ Замена переменных в иррациональном уравнении

§ Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$