МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ

ЕГЭ

Математика

Показательные и логарифмические уравнения

Москва 2010

Показательные уравнения

Заметим сначала, что $1^{f(x)} = 1^{g(x)}$ при любых $f(x)$ и $g(x)$ в ОДЗ; $0^{f(x)} = 0,$ если $f(x) > 0.$

Рассмотрим уравнение

$$a^x = a^y.$$

Из монотонности показательной функции следует, что

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y,\ a > 0,\ a \neq 1. \qquad \text{(УР П1)}$$

Если же решается уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)},$ где a – параметр, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ \begin{cases} a > 0,\ a \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УР П2)}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$a^x = b.$$

Из свойств показательной функции следует, что если задано $a > 0,$ $a \neq 1,$ то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b \leq 0$ не имеет решения. Заметим, что из монотонности показательной функции при этом следует, что для любого положительного числа b существует единственное число x такое, что $a^x = b.$ Это число математики договорились *называть логарифмом* числа b по основанию a и *обозначать* $\log_a b$, т. е.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0 \qquad \text{(УР П3)}$$

Из определения следует, что

$$a^{\log_a b} = b \text{ в ОДЗ.}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для $b > 0,$ $a > 0,$ $a \neq 1$).

Примечание. В том случае, когда *по условию* $x = m,$ $m \in N,$ уравнение решается по-другому, т. к. операции с $a^m,$ $m \in N$ отличаются от операций с $a^x,$ $x \in R$!

Умение преобразовать исходное уравнение к более простому является определяющим для успешного решения большинства учебных примеров.

Решите уравнения 1 – 4 и укажите корень (или сумму корней, если их несколько)

1. $7^{5x+6}=49.$

►Воспользуемся (УР П1): $7^{5x+6}=49 \Leftrightarrow 7^{5x+6}=7^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x+6=2 \Leftrightarrow x=-0,8.$

Ответ. $\{-0,8\}$. ◄

2. $\left(3^{2x^2-29}-27\right)\cdot\sqrt[4]{5x+18}=0.$

►Пример простой, но и при решении показательных уравнений не надо забывать о том, что множители могут влиять на отбор корней:

$$\left(3^{2x^2-29}-27\right)\cdot\sqrt[4]{5x+18}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+18=0; \\ \begin{cases} 5x+18\ge 0, \\ 3^{2x^2-29}-3^3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+18=0; \\ \begin{cases} 5x+18\ge 0, \\ 2x^2-29=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+18=0; \\ \begin{cases} 5x+18\ge 0, \\ x=\pm 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{18}{5}, \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{18}{5}+4=0,4.$$

Ответ. $\{-3,6;\ 4\};\ 0,4.$ ◄

3. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1,5x-7,2}=8.$ **4.** $10^{x+4}-17\cdot 10^{x+2}=83.$

Замена переменных в уравнении, содержащем показательную функцию

Уравнения, содержащие показательные функции, нередко с помощью замены переменных приводятся к рациональным. Выбор замены переменных часто очевиден.

Решите уравнения 5 – 8 и найдите сумму квадратов их корней соответственно

5. $3^x + 2\cdot 3^{\frac{x}{2}} - 15 = 0.$

►Видно, что уравнение является квадратным относительно $3^{\frac{x}{2}}.$ Поэтому удобно сделать замену переменных: $3^{\frac{x}{2}} = t,\ t > 0.$ Тогда уравнение на самом деле примет вид системы:

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

Возвращаемся к старым переменным: $3^{\frac{x}{2}} = 3 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4.$

Ответ. $\{2\}$, 4. ◄

Примечание. Мы не всегда будем так подробно делать замену переменных в очевидных квадратных уравнениях, а будем решать их «на черновике». Кроме того, не всегда будем писать систему, а просто будем искать положительные решения.

6. $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 5.$

► Замена переменных в этом уравнении не сразу видна – многие забывают о существовании взаимно обратных иррациональных выражений и чисел. Заметим прежде всего, что в нашем случае $2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$. Остальные выражения приходится сравнивать со степенями $2+\sqrt{3}.$ Оказывается, что $7+4\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2,$ $26+15\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^3.$ Тогда удобно ввести новую переменную $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x,$ $t > 0,$ и уравнение примет вид:

$$t^3 - 5t^2 + 6t + \frac{1}{t} = 5 \Leftrightarrow t^4 - 5t^3 + 6t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 - 5\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 0.$$

Опять получили возвратное уравнение. Перепишем его в таком виде:

$$\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\dfrac{1}{t}=1 \Leftrightarrow \varnothing, \\ t+\dfrac{1}{t}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}.$$ Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \left(2+\sqrt{3}\right)^{x}=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=1, \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x}=2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Ответ. $\{-1;1\}$, 2. ◄

7. $4^{y}+\dfrac{4^{y+1}}{\left(2^{y}+2\right)^{2}}=5$. **8.** $6\cdot 2^{3x+2}-10\cdot 2^{2x+1}+2^{x+1}+1=0$.

Простейшие логарифмические уравнения

Рассмотрим простейшие логарифмические уравнения. Заметим, что

$$\log_a f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=1. \qquad \text{(УР Л1)}$$

Так как функция $\log_a x$ при любом допустимом основании ($a>0,\ a\neq 1$) является строго монотонной, то

$$\log_a x=\log_a y \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x=y. \qquad \text{(УР Л2)}$$

При решении логарифмических уравнений особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование. Эти преобразования не являются равносильными.

Логарифмированием уравнения $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ по основанию a $\left(a>0,\ a\neq 1\right)$ называется переход к уравнению $\log_a f\left(x\right)=\log_a g\left(x\right)$. При этом область существования уравнения *сужается*, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел. Например:

$x^3=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-1, \\ x=1, \end{array}\right.$ а $\lg x^3=\lg x \Leftrightarrow x=1$. Уравнения не равносильны, т. к. имеют разные множества решений.

Потенцированием уравнения называется переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$. При этом область определения *расширяется*, т. к. второе уравнение может существовать при любых $f(x), g(x)$, а первое – только при положительных. Поэтому запишем и запомним:

- если $f(x) = g(x)$ и $f(x) > 0$ (а это означает, что автоматически и $g(x) > 0$) или $g(x) > 0$ (а это означает, что автоматически и $f(x) > 0$), то $\log_a f(x) = \log_a g(x)$;
- если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$, т. е.

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x). \qquad \text{(УР Л3)}$$

Можно записать и так:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \qquad \text{(УР Л4)}$$

При решении уравнения достаточно проверить одно из неравенств: $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$ – то, которое проще.

Если мы решаем уравнение $\log_a f(x) = g(x)$, то

$$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}. \qquad \text{(УР Л5)}$$

ОДЗ выполняется автоматически.

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлогарифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), а потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связаны с ОДЗ логарифмов.

Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать *проверку* – подставить найденные корни в само *уравнение*.

Нередко школьники находят ОДЗ, затем корни уравнения, а для проверки корни подставляют только в ОДЗ. Этого мало: если корень не принадлежит ОДЗ, то он, конечно, не может быть решением; но если корень принадлежит ОДЗ, то это не значит, что он является решением уравнения – надо подставить его в уравнение.

Решите уравнения 9 – 12 и укажите соответственно произведение корней (или корень, если он один)

9. $\log_2(x+7)=5.$

►Воспользуемся определением логарифма, или, что то же, (УР Л5): $\log_2(x+7)=5 \Leftrightarrow x+7=2^5 \Leftrightarrow x=25$ (ОДЗ выполняется автоматически).

Ответ. $\{25\}$. ◄

10. $\sqrt{3-2x}\log_2(10-x^2)=0.$

При решении этого примера не надо забывать об ОДЗ и корня, и логарифма. Решение можно оформить по-разному.

Первый способ (ОДЗ записываем в равносильном соотношении).

$$► \sqrt{3-2x}\log_2(10-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-2x=0, \\ 10-x^2>0; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(10-x^2)=0, \\ 3-2x\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}; \\ \begin{cases} 10-x^2=1, \\ 3-2x\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Произведение всех корней уравнения равно – 4,5.

Ответ. $\left\{\dfrac{3}{2}, -3\right\}$, – 4,5. ◄

Второй способ (ОДЗ записываем отдельно).

► Запишем сначала ОДЗ: $\begin{cases} 3-2x \ge 0, \\ 10-x^2 > 0. \end{cases}$ Теперь решаем в ОДЗ:

$$\sqrt{3-2x}\log_2\left(10-x^2\right)=0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 3-2x=0, \\ 10-x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=\pm 3 \end{array}\right. \overset{с\ учетом\ ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1x_2=-4{,}5.$

Ответ. $\left\{\dfrac{3}{2}, -3\right\}$, $-4{,}5$. ◄

11. $\lg\left(x^2+6x\right)=\lg\left(5x+6\right)$. **12.** $\lg\left(x^2+8x\right)=\lg\left(2x+7\right)$.

Уравнения, содержащие сложную экспоненту

По определению полагают, что для любого $c>0$, $c \ne 1$

$$a(x)^{f(x)}=c^{f(x)\log_c a(x)}. \qquad \text{(О 1)}$$

Рассмотрим теперь уравнение $a\left(x\right)^{f(x)}=a\left(x\right)^{g(x)}$. Воспользуемся определением сложной экспоненты (возьмём в роли c число 10 – наиболее знакомое школьникам основание логарифма): $a\left(x\right)^{f(x)}=10^{f(x)\lg a(x)}$, $a\left(x\right)^{g(x)}=10^{g(x)\lg a(x)}$, тогда $a\left(x\right)^{f(x)}=a\left(x\right)^{g(x)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)}=10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f\left(x\right)\lg a\left(x\right)=$

$$=g\left(x\right)\lg a\left(x\right) \Leftrightarrow \lg a\left(x\right)\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\left(x\right)=1, \\ \begin{cases} a\left(x\right)>0, \\ f\left(x\right)=g\left(x\right). \end{cases} \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$a\left(x\right)^{f(x)}=a\left(x\right)^{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} a\left(x\right)=1, \\ f\left(x\right)=g\left(x\right), \end{array}\right. \qquad \text{(УР П4)}$$

или полное условие равносильности:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x)=1, \\ \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{(УР П5)}$$

Соотношение

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \qquad \text{(УР П6)}$$

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его прологарифмировали как «обычную» степень по допустимому основанию. Замечательно, что даже ОДЗ левой и правой частей всегда совпадают! Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют и *осуществляют логарифмированием* уравнения $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

Вот мы и получили равносильные переходы, которые декларируются в литературе.

Примечание. Мы не решаем уравнение $(-2)^x = -8,$ потому что показательная функция не определена при $a = -2.$ А этот факт связан с тем, что $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$: левая часть существует, а правая – нет! И если ничего не сказано о том, каким может быть x (а значит, $x \in R,$ и число 3 может быть выражено рациональным числом $\frac{12}{4}$), уравнение не имеет решений.

Однако мы решаем уравнение $(-2)^n = -8$, где *заранее* известно, что n – число целое (а операция возведения в целую степень отлична от операции возведения в рациональную степень). Вспомним, что и $\sqrt[3]{-2} \neq (-2)^{\frac{1}{3}}$ именно потому, что если определить $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и для отрицательных чисел, то $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}.$

Решите уравнения 13 – 16 и найдите соответственно сумму квадратов их корней

13. $x^{x^2+1} = x^{3x+5}.$

А что с этим уравнением делать? Оно не показательное, не степенное.

► «Продвинутые» школьники решают его так:

$$x^{x^2+1}=x^{3x+5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;\\ \begin{cases}x>0,\\ x^2-3x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm5}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=4\end{array}\right.\Rightarrow x_1^2+x_2^2=17.$$

Ответ. $\{1;4\}$, 17. ◄

Верно. Откуда взялся этот способ решения? В «Сканави» так написано. А откуда это следует? Практически никто не знает, а мы теперь знаем и можем объяснить. Так? Так…

Примечание. Вернёмся к нашему уравнению. Среди корней квадратного уравнения есть число $x=-1$, и при подстановке его в уравнение $(-1)^2=(-1)^2$ оно обращается в тождество. Есть ещё одно число, которое тоже обращает уравнение в тождество – это число $x=0$. Значит, числа -1 и 0 являются решениями заданного уравнения? Тогда ответ неправильный?

Числа -1 и 0 *не принято* считать решениями данного уравнения, т. к. они не принадлежат определённому нами ОДЗ. Однако если эти числа указаны, то наказывать за это нельзя: эти числа, действительно, обращают уравнение в тождество, но правил нахождения таких решений не существует. Кто сказал, что ещё каких-нибудь отрицательных решений нет? Или есть?

Поэтому для корректности в заданиях ЕГЭ просят найти положительные корни такого уравнения. Мы пока этого делать не будем.

14. $x^{x^2}=x^{-2-3x}$.

► Воспользуемся определением сложной экспоненты:

$$x^{x^2}=x^{-2-3x}\Leftrightarrow 10^{x^2\lg x}=10^{(-2-3x)\lg x}\Leftrightarrow\left(x^2+3x+2\right)\lg x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ \begin{cases}x>0,\\ x^2+3x+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x^2=1.$$

Корни -1, -2 *не входят в ОДЗ, а потому не являются решениями уравнения.* Это несмотря на то, что $(-1)^1=(-1)^1,(-2)^4=(-2)^4$, но здесь x имеет право быть рациональным, и мы получаем противоречие в том, что $\left(-\dfrac{2}{2}\right)^{\frac{4}{4}}\neq(-1)^1$ (левая часть не определена, а правая часть существует!).

Ответ. $\{1\},\ 1.$ ◄

15. $x^{x^2+2}=x^{x+4}$.

16. $\left(x^2+x-57\right)^{3x^2+3}=\left(x^2+x-57\right)^{10x}$.

Послесловие

В этой демо-версии мы привели в кратком виде некоторые параграфы нашего пособия «Показательные и логарифмические уравнения». В самом пособии вы сможете найти более полную информацию по затронутым темам, а также следующие параграфы:

§ Основные формулы для показательной функции

§ Основные формулы для логарифмической функции

§ Упрощение выражений, содержащих логарифмы

§ Множество значений показательных и логарифмических функций

§ Преобразование буквенных выражений

§ Замена переменных в логарифмических уравнениях

§ ОДЗ и логарифмические уравнения. Задачи-«ловушки»

§ Сложная экспонента $y(x)=a(x)^{f(x)}$.

§ Уравнение $a(x)^{f(x)}=a(x)^{g(x)}$.

§ Логарифм с переменным основанием.

§ Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$ и $\log_{a(x)} f(x)=g(x)$