# ЕГЭ

## Математика

## Показательные и логарифмические неравенства

Москва 2010

## Правила П1, П2.

Сейчас мы рассмотрим способ решения неравенств вида

$$a^{f(x)}-a^{g(x)}>0\,(<0),$$

в котором вообще *не надо думать* о том, каково основание по сравнению с 1. Мы будем пользоваться правилами, которые за *один* шаг сведут решение самых распространённых *показательных и логарифмических* неравенств к решению *рациональных* неравенств.

***Теорема (Правило П1)***

> ✎ Знак разности $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.

***Следствие (Правило П2)***

> ✎ Знак разности $a^{f(x)}-1$ совпадает со знаком произведения $(a-1)f(x)$ в ОДЗ.

*Замечательные правила П1* и *П2 намного* упростят решение сложных неравенств, содержащих в качестве *множителя* или разность $a^{f(x)}-a^{g(x)}$, или разность $a^{f(x)}-1$.

**Решите неравенства 1 – 4 и найдите наименьшую длину промежутка, в котором расположены все их решения соответственно**

**1.** $\left(4x^2+4x-3\right)\left(3^{2x^2}-3^{x+3}\right)\le 0.$

*Первый способ* (самый распространенный).

► Как обычно в литературе и школе решается это неравенство? Рассматривается два случая.

1. Если $4x^2+4x-3\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right]$, то

$$3^{2x^2}-3^{x+3}\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2\ge x+3 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{3}{2};\ +\infty\right).$$

Отсюда следует, что в этом случае $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$.

2. Если $4x^2+4x-3\ge 0 \Leftrightarrow\ x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$, то

$$3^{2x^2}-3^{x+3}\le 0 \Leftrightarrow 2x^2\le x+3 \Leftrightarrow x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right].$$

Отсюда следует, что в этом случае $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. Объединяя оба случая, получаем, что $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. Наименьшая длина промежутка, в котором расположены все решения неравенства, равна 3.

**Ответ.** $\left[-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right], 3.$ ◄

Теперь попробуем решить неравенство по-другому.

*Второй способ* (с использованием правила П1).

► Решим наше неравенство короче. Применим правило П1, а затем полученное рациональное неравенство решается *классическим* методом интервалов для рациональных функций, известным из 9 класса:

$$\left(4x^2+4x-3\right)\left(3^{2x^2}-3^{x+3}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(4x^2+4x-3\right)(3-1)\left(2x^2-x-3\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\Rightarrow l=3.$$

**Ответ.** $\left[-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right], 3.$ ◄

Что больше нравится? По мнению автора, второй способ позволяет избавиться от «головной боли», возникающей при решении показательных неравенств стандартным (первым) способом. Ведь при этом нам не нужно рассматривать случаи, когда основание больше или меньше 1. Поэтому следует взять на вооружение правила П1, П2 и условия равносильности.

**2.** Решите неравенство $\dfrac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0$ и укажите наименьшую длину промежутка, в котором расположены все его решения, удовлетворяющие условию $x\le 33$.

►  На первый взгляд, конечно, неравенство очень громоздкое. Его едва ли кто возьмётся решать привычным способом рассмотрения «случаев» – охота пропадает сразу от одного вида такого неравенства. Но взглянем на правило П1. Из него следует, что знак разности $3^{x^2}-3$ совпадает со знаком произведения $(3-1)\left(x^2-1\right)$, знак разности $2^{-x}-2^3$ совпадает со знаком произведения $(2-1)(-x-3)$, знак разности $\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)$ совпадает со знаком произведения $(4-1)\left(x-x^2-2x+2\right)$, а тогда

$$\frac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-1\right)(-x-3)\left(x-x^2-2x+2\right)}{(x-2)(x-3)}>0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(x+1)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x-3)}>0.$$

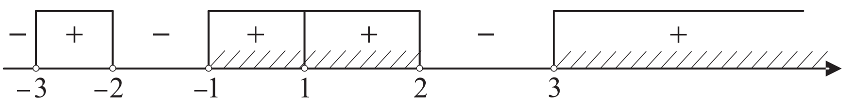


Рис.1

Мгновенно исчезли все показательные функции – получилось рациональное неравенство, которое мы решили классическим методом интервалов (рис.1). Учтём условие $x\le 33$: $x\in(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup(3;33)$. Искомая наименьшая длина равна $33-(-3)=36$.

**Ответ.** $(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup(3;33)$, $36$. ◄

Ну, как? Красиво? Просто?

**Решите неравенства 3–5 и укажите наименьшую длину промежутка, в котором расположены все их решения соответственно**

**3.** $\left(25x^2-10x-3\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{25x^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{45x-14}\right)\geq 0.$

**4.** $\left(2^x-2^{x^2+2}\right)\left(3^{x^2-1}-3^{2x+7}\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5}\right)>0.$

**5.** $\dfrac{4^{\frac{1}{x}}-4}{(2+x)\sqrt{25-x}}<0.$

## Правила Л1 и Л2.

Мы сейчас выведем условия равносильности и правила, с помощью которых многие неравенства будут решаться проще, в *частности,* и те, в которых можно сделать *замену* переменных.

Практика показала, что есть преподаватели и учащиеся, которые с недоверием относятся к «такому повороту событий» и продолжают решать «по старинке», рассматривая разные «случаи». Однако та же практика показывает, что задания последних лет таковы, что решения «по старинке» приводят к очень большому числу случаев, т. к. предполагают именно тот подход, о котором мы расскажем ниже. Так как вопрос оказался не простым, то мы выведем наши условия равносильности в виде *теорем*.

### *Правило Л1*

При любом допустимом основании $a\,(a>0, a\neq 1)$ и любых положительных функциях $f(x)$ и $g(x)$ знак разности $\log_a f(x)-$

$-\log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$, то есть:

✐ Знак разности $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ.

***Правило Л2***

✐ Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-1\big)$ в ОДЗ. ◄

При рассмотрении *нестрогих* неравенств условия равносильности имеют *тот же* вид.

Эти правила дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

**Решите неравенства 6 – 11 и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все их решения**

**6.** $\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2+x+1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+x+17\right)\geq 0$.

Конечно, пример решается просто, если вспомнить свойства логарифмов при основании, меньшем 1. Но мы поступим по-другому.

►Применим правило Л1 (и свойства логарифмов при основании, меньшем 1, вспоминать не надо!):

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(2x^2+x+1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+x+17\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\left(2x^2+x+1\right)-\left(x^2+x+17\right)\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-16\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-4;\ 4]\Rightarrow l=8.$$

**Ответ.** $[-4;\ 4]$, 8. ◄

**7.** $\dfrac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0.$

Примеры такого вида встречаются в тестах, ЕГЭ и на экзаменах практически во все вузы. Это наиболее популярные примеры. Обычно их решают, рассматривая совокупность двух систем, в каждой из которых рассматривается случай, когда числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Мы этого делать не будем, но традиционное решение, для сравнения (второй способ) всё-таки приведём.

*Первый способ* (с применением правила Л1).

► Найдём сначала ОДЗ*: $\begin{cases}3x^2-3x+7>0,\\ -x^2+x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;3).$

А теперь воспользуемся (П Л1) – знак разности $\lg\left(3x^2-3x+7\right)-$ $-\lg\left(-x^2+x+6\right)$ совпадает со знаком разности $(3x^2-3x+$ $+7+x^2-x-6)$ в ОДЗ*:

$$\frac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(-x^2+x+6\right)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0\overset{\text{Î ÄÇ*}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{Î ÄÇ*}}{\Leftrightarrow}\frac{3x^2-3x+7+x^2-x-6}{\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)}=\frac{(2x-1)^2}{\left(x-\frac{3}{10}\right)\left(x-\frac{7}{10}\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};+\infty\right).$ Учтём ОДЗ*:

$x\in\left(-2;\ \frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};\ 3\right)\Rightarrow l=5.$

**Ответ.** $\left(-2;\ \frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};\ 3\right)$, 5. ◄

*Второй способ* (традиционный).

►Рассмотрим два случая.

Первый случай – числитель неотрицателен, знаменатель положителен:

$$\begin{cases}\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)\ge 0,\\ (10x-7)(10x-3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-3x+7\ge 6+x-x^2,\\ 6+x-x^2>0,\\ \left(x-\dfrac{7}{10}\right)\left(x-\dfrac{3}{10}\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)^2\ge 0,\\ x\in(-2;3),\\ \left(x-\dfrac{7}{10}\right)\left(x-\dfrac{3}{10}\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-2;\ \frac{3}{10}\right)\cup\left(\frac{7}{10};\ 3\right).$$

Второй случай – числитель не положителен, знаменатель отрицателен:

$$\begin{cases}(2x-1)^2\le 0,\\ x\in(-2;\ 3),\\ x\in\left(\dfrac{3}{10};\ \dfrac{7}{10}\right)\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Объединяя оба случая, получаем, что

$$x\in\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right)\Rightarrow l=5.$$

**Ответ.** $\left(-2;\ \dfrac{3}{10}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left(\dfrac{7}{10};\ 3\right)$, 5. ◄

Теперь слово за читателем. Какой способ выбираете?

**8.** $\left(x^2-11x+30\right)\log_2(x-3)\le 0.$

**9.** $\dfrac{\left(\log_{\frac{1}{4}}x+3\right)\left(2\log_{\frac{1}{4}}x-3\right)}{2\log_{\frac{1}{4}}x}>0.$

**10.** $\left(x^2+3x-10\right)\log_2(x+4)\le 0.$

**11.** $x\log_2\left(4^{x+1}-9\cdot 2^x+6\right)>2x.$

## Послесловие

В этой демо-версии мы привели в кратком виде некоторые параграфы нашего пособия «Показательные и логарифмические неравенства». В самом пособии вы сможете найти более полную информацию по затронутым темам, а также следующие параграфы:

§ Простейшие показательные неравенства

§ Неравенства вида $h(x)\cdot\left(a^{f(x)}-a^{g(x)}\right)\geq 0$

§ Замена переменных («явная» и «неявная») в неравенствах, содержащих показательную функцию

§ Простейшие логарифмические неравенства. Влияние ОДЗ на отбор решений

§ Неравенства вида $\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{h(x)}\geq 0.$

§ Неравенства, содержащие сложную экспоненту. Правила П3 и П4

§ Неравенства, содержащие логарифм с переменным основанием