МФТИ помогает готовиться к ЕГЭ

ЕГЭ

Математика

Иррациональные неравенства

Москва 2010

Три способа решения неравенств вида $\sqrt{ax+b} > cx+d$ и $\sqrt{ax+b} < cx+d$

Сейчас мы рассмотрим самые *простые* на первый взгляд иррациональные неравенства – это неравенства вида $\sqrt{ax+b} > cx+d$ и $\sqrt{ax+b} < cx+d$. Однако именно здесь встречается больше всего ошибок.

Рассмотрим примеры с неравенством *вида*

$$\boxed{\sqrt{ax+b} > cx+d.}$$

1. $\sqrt{2x-1} > x-2.$

Первый способ (самый распространенный).

►Найдём сначала ОДЗ: $2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0,5.$

Теперь рассмотрим два случая.

1) Если $x-2<0,$ то неравенство *выполнено в ОДЗ*, т. к. любое неотрицательное число больше любого отрицательного.

2) Если $x-2 \ge 0,$ то обе части неравенства в ОДЗ неотрицательны, поэтому после возведения их в квадрат получим равносильное неравенство, в котором ОДЗ *выполняется автоматически*:

$$\sqrt{2x-1} > x-2 \overset{x\ge 2}{\Leftrightarrow} 2x-1 > x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow x \in [1;\, 5].$$

Учтём условие $x-2 \ge 0$ и получим, что $x \in [2;\, 5).$

Замечание. В этом случае, чтобы *не забыть* про условие $x-2 \ge 0,$ лучше сразу писать систему:

$$\sqrt{2x-1} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 2x-1 > x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x^2-6x+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x \in (1;\ 5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2;\ 5).$$

Отметим решения двух случаев на рис. 2.

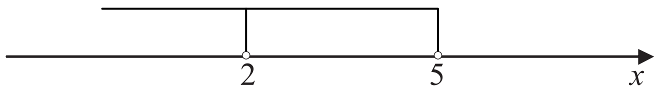

Рис. 2

Теперь учтём ОДЗ: нанесём ОДЗ на числовую ось «вторым этажом» – общая часть является решением задачи. Заштрихуем её, и решение всей задачи стало «видно» – рис.3.

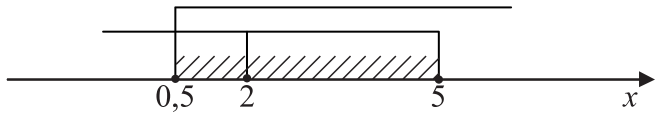

Рис. 3

Итак, $x \in [0,5;\, 5)$. Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна 4,5.

Ответ. $[0,5;\, 5)$; $4,5$.◄

Примечание 1. Самая распространённая ошибка школьников состоит в том, что они, забывая о «случаях», сразу возводят в квадрат обе части, получая не всегда верное неравенство.

Примечание 2. Неравенство $(x-1)(x-5)<0$ можно решать методом *интервалов*. А можно *сразу* записать ответ – ведь известно, что квадратный трёхчлен с положительным коэффициентом при квадрате переменной отрицателен в промежутке между его корнями и положителен в промежутке вне корней.

Второй способ (решение заданного неравенства «без решения неравенства»).

► Для решения нашей задачи построим графики функций $y=\sqrt{2x-1}$, $y=x-2$, затем посмотрим, где первый график расположен выше второго (рис. 6). Видно, что $\sqrt{2x-1}>x-2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [0,5;\, x_0)$. Для нахождения решения останется найти x_0, т. е. решить *только* уравнение $\sqrt{2x-1}=x-2$ (и *не надо* рассматривать случаи разных знаков для $x-2$):

$$\sqrt{2x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0, \\ 2x-1=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x=3\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=5.$$

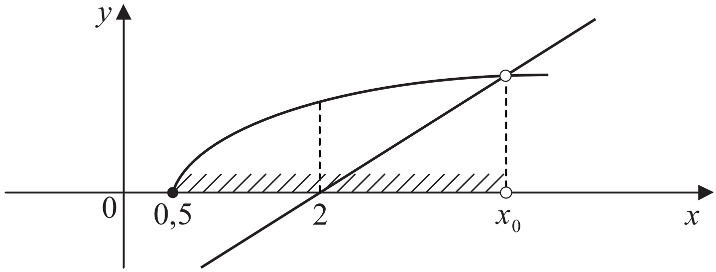

Рис. 6

Получаем сразу, что $x\in[0,5;\,5)$.

Ответ. $[0,5;\,5)$; $4,5$. ◄

Примечание 3. На рис. 6 хорошо видно, *почему* при стандартном решении необходимо рассматривать *два* случая.

1) На промежутке, где $x-2<0$ очевидно, что полупарабола $y=\sqrt{2x-1}$ расположена выше прямой $y=x-2$.

2) На промежутке, где $x-2\ge 0$, есть промежуток, где $\sqrt{2x-1}>x-2$, и промежуток, где $\sqrt{2x-1}\le x-2$, поэтому приходится решать неравенство, чтобы найти тот промежуток, где выполнено именно заданное неравенство $\sqrt{2x-1}>x-2$.

Третий способ (с помощью замены переменных).

► Заданное неравенство можно решить и *третьим* способом. Сделаем замену переменных. Пусть $t=\sqrt{2x-1}$, $t\ge 0$. Тогда неравенство примет вид *системы* неравенств:

$$\begin{cases} t\ge 0, \\ t>\dfrac{t^2+1}{2}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ t^2-2t-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ t\in(-1;3) \end{cases} \Leftrightarrow t\in[0;3).$$

Для того чтобы продолжить решение, ответ нужно записать не в виде промежутка $[0;\,3)$, а в виде *неравенства* $0\le t<3$. Возвращаясь к старым переменным, получаем, что $0 \le \sqrt{2x-1} < 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0{,}5 \le x < 5$. Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна 4,5.

Ответ. $[0{,}5;\, 5)$; 4,5.

Примечание 4. Этот способ хорош тем, что, во-первых, тоже не рассматривает «случаев», а во-вторых тем, что не надо возводить обе части в квадрат. ◄

3. $\sqrt{5x+1} > x+1$.

4. $\sqrt{5x+1} \ge 2(x-1)$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$, $\sqrt{f(x)} \le g(x)$. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}} \qquad \text{(УР К7)}$$

5. $\sqrt{x^3+8x^2-20x} \le 2x-4$.

Первый способ.

►Воспользуемся (УР К7):

$$\sqrt{x^3+8x^2-20x} \le 2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \ge 0, \\ x^3+8x^2-20x \le 4x^2-16x+16, \\ x^3+8x^2-20x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ (x+4)(x+2)(x-2) \le 0, \\ (x+10)(x-2)x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x-2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ. 2. ◄

Второй способ.

►Можно заметить, что $x = 2$ является корнем подкоренного выражения. Что это даст? Посмотрим. Преобразуем неравенство:

$$\sqrt{x^3+8x^2-20x}\le 2x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-2x^2+10x^2-20x}\le 2x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)\left(x^2+10x\right)}\le 2(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left(\sqrt{x^2+10x}-2\sqrt{x-2}\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left(x^2+10x-4x+8\right)\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(x+2)(x+4)\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}\le 0 \Leftrightarrow x=2$$

(т. к. $x-2\ge 0$ в ОДЗ, то $x+2>0$, $x+4>0$).

Ответ. 2. ◄

6. $\sqrt{2x+1}\le\sqrt{x^3-4x^2+x+5}.$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]\cup[4;\ +\infty).$

►Любопытное неравенство – его трудно решить «по-школьному», потому что привычное ОДЗ не находится! А ведь при использовании условия равносильности (УР К8) его и не надо искать. Воспользуемся (УР К8):

$$\sqrt{2x+1}\le\sqrt{x^3-4x^2+x+5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\le x^3-4x^2+x+5 \Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4\ge 0, \\ 2x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x-4)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-1;1]\cup[4;\ +\infty), \\ x\ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]\cup[4;\ +\infty).$$

Система неравенств решалась классическим методом интервалов – рис. 10.

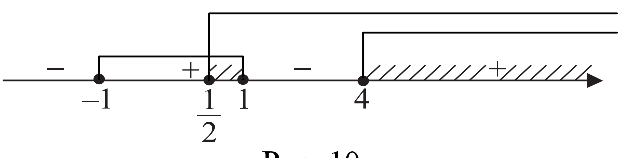

Рис. 10

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]\cup[4;\ +\infty).$ ◄

7. $\sqrt{2x^2-7x-4}>-x-\frac{1}{4}.$

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{15-\sqrt{290}}{4}\right) \cup [4; +\infty)$.

Первый способ.

► Не всегда удобно пользоваться (УР К5) – система бывает громоздкой. Тогда удобней найти сначала ОДЗ:

$$2x^2 - 7x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty),$$

а затем рассмотреть приведённые в (УР К6) два случая совокупности отдельно.

1. Если $-x - \dfrac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{4}$, то неравенство выполнено в ОДЗ, т. е. $x \in [4; +\infty)$.

2. Если $-x - \dfrac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{4}$, то

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 4} > -x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{4}, \\ 2x^2 - 7x - 4 > x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{4}, \\ 16x^2 - 120x - 65 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{4}, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{15-\sqrt{290}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{15+\sqrt{290}}{4}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{15-\sqrt{290}}{4}\right).$$

Собирая оба случая, получаем, что

$$x \in \left(-\infty; \frac{15-\sqrt{290}}{4}\right) \cup [4; +\infty).$$

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{15-\sqrt{290}}{4}\right) \cup [4; +\infty)$. ◄

Второй способ.

►Прикинем эскизы графиков левой и правой частей неравенства. Для этого сначала построим параболу

$y_1(x)=2x^2-7x-4=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)$, а уже затем «извлечём» корень, построив $y=\sqrt{2x^2-7x-4}$. Заметим при этом, что теперь ветви «загибаются» по-другому: $y=\sqrt{2x^2-7x-4}$ при $x\to+\infty$ ведёт себя как прямая $y=\sqrt{2}\left(x-\frac{7}{4}\right)$, а при $x\to-\infty$ как прямая $y=-\sqrt{2}\left(x-\frac{7}{4}\right)=-\sqrt{2}x+\frac{7\sqrt{2}}{4}$, т. к.

$$y=\sqrt{2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}-\frac{49}{16}\right)-4}=\sqrt{2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-4-\frac{49}{8}}=$$

$$=\sqrt{2}\left|x-\frac{7}{4}\right|\sqrt{1-\frac{81}{16\left(x-\frac{7}{4}\right)^2}}.$$

Строим на том же рисунке и прямую $g(x)=-x-\frac{1}{4}$ (рис. 11).

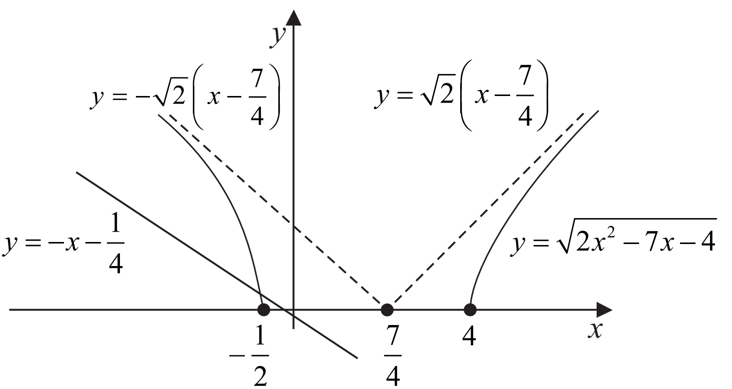

Рис. 11

Теперь видно, что решением неравенства является объединение промежутков $x \in (-\infty;\, x_0) \cup [4;\, +\infty)$. Чтобы завершить решение, осталось только найти x_0, которое является решением уравнения

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 4} = -x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - \dfrac{1}{4} \ge 0, \\ 2x^2 - 7x - 4 = \left(-x - \dfrac{1}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{4}, \\ 16x^2 - 120x - 65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{4}, \\ x = \dfrac{15 \pm \sqrt{290}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \frac{15 - \sqrt{290}}{4}.$$

Итак,

Ответ. $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{15 - \sqrt{290}}{4}\right) \cup [4;\ +\infty)$. ◄

Примечание. Заметим, что второй способ проще, но он требует хороших навыков в построении графиков.

8. $\sqrt{x^2 - x - 6} > 2x - 5.$

9. $\sqrt{x^3 + x^2 - 2x} + 1 \le x.$

Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \ge 0$

При решении неравенств вида

$$\boxed{\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \ge 0,}$$

как выясняется, школьники очень часто *ошибаются*. Типичная ошибка состоит в том, что они считают, что $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$, *теряя* при этом решения уравнения $f(x) = 0$

Как быть? Воспользуемся определением нестрогого неравенства Решить нестрогое неравенство – это значит решить уравнение $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}=0$ и неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}>0.$ Поэтому

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)\ne 0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.} \qquad \text{(УР К12)}$$

10. $\dfrac{\sqrt{(3-x)(x+15)}}{x+7}\ge 0.$

►Используя условие равносильности (УР К12), решим заданное неравенство:

$$\frac{\sqrt{(3-x)(x+15)}}{x+7}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-15,\\ x=3,\\ \begin{cases}(3-x)(x+15)>0,\\ x+7>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\ x\in\{-15\}\cup(-7;\,3].$$

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна $3-(-15)=18.$

Ответ. $\{-15\}\cup(-7;\,3]$, $18.$ ◄

11. $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-35}}{x^2+6x-55}\le 0.$

12. $\dfrac{\sqrt{x+5}}{(x-12)(3-x)}\ge 0.$

13. $\dfrac{\sqrt{15x-x^2-14}}{x-5}\le 0.$

Послесловие

В этой демо-версии мы привели в кратком виде некоторые параграфы нашего пособия «Иррациональные неравенства». В самом пособии вы сможете найти более полную информацию по затронутым темам, а также следующие параграфы:

§ Понятие равносильности уравнений и неравенств.

§ Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

§ ОДЗ*. Правило П К1. Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \leq 0$.

§ Правило П К2 . Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \geq 0 \, (\leq 0)$.

§ Графическое решение неравенств вида $\sqrt{a^2 - x} \leq \sqrt{x + b^2} + \sqrt{x + c^2}$.

§ Оценка множества значений.

§ Неравенства вида $g(x)\sqrt{f(x)} \geq 0$.